Prof. Dr. Martin Skutella
Ronald Koch, Alexia Weber

10. Übungsblatt: Numerische Algorithmen / Numerische Lineare Algebra (Lineare Optimierung)

Abgabe: 14.06.2006, 10:00 Uhr (Briefkasten)

Aufgabe 33 (4 + 4 Punkte)

a) Zeigt: Jede nichttriviale Seitenfläche eines Polyeders ist Durchschnitt von Facetten des Polyeders.

b) Seien P ein Polyeder mit $\dim(P) = d$ und F eine Seitenfläche von P der Dimension k mit $0 \leq k < d$. Dann gibt es Seitenflächen $F_{k+1}, F_{k+2}, \ldots, F_{d-1}$ von P mit

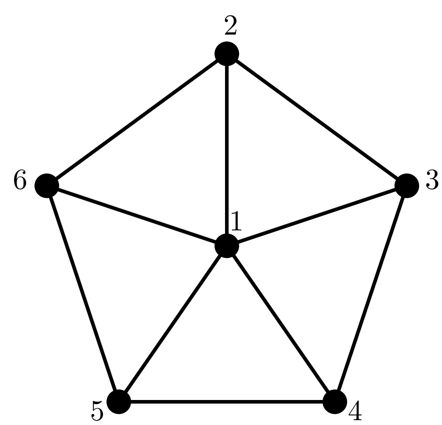
i) $F \subseteq F_{k+1} \subseteq F_{k+2} \subseteq \ldots \subseteq F_{d-1} \subseteq P$,

ii) $\dim(F_{k+i}) = k + i$, für $i = 1, \ldots, d - k - 1$,

(Beweis durch Induktion über $d - k$).

Aufgabe 34 (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 3 Punkte)

Es sei $G = (V, E)$ das im folgenden dargestellte 5-Rad:



Eine *stabile Menge* in einem Graphen ist eine Teilmenge seiner Knoten, in der keine zwei Knoten durch eine Kante miteinander verbunden sind. Zu einer Menge von Knoten $n_1, \ldots, n_k$ ist der *Inzidenzvektor* dieser Knotenmenge als 0/1-Vektor definiert, der an genau den Stellen $n_1, \ldots, n_k$ 1-Einträge und sonst 0-Einträge hat. (Zu der Knotenmenge $\{2, 5\}$ ist der Inzidenzvektor also $(0, 1, 0, 0, 1, 0)^T$.) STAB(G) ist die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der stabilen Mengen vom Graphen G.

a) Bestimmt alle stabilen Mengen des Graphen G.

b) Zeigt, dass keine der Ungleichungen $x_i + x_j \leqslant 1$ (ij Kante von G) eine Facette von STAB(G) definiert.

c) Zeigt, dass für jedes Dreieck i, j, k die Ungleichung $x_i + x_j + x_k \leqslant 1$ eine Facette von STAB(G) definiert.

d) Beweist, dass die Ungleichung $2x_1 + x_2 + ... + x_6 \leqslant 2$ eine Facette von STAB(G) definiert.

e) Zeigt, dass für $i = 1, \ldots, 6$ die Ungleichung $x_i \geq 0$ eine Facette von STAB(G) definiert.

f) Zeigt, dass jede Ecke des Polytops, das durch die in c), d) und e) genannten Ungleichungen definiert wird, ganzzahlig ist.

g) Zeigt mit Hilfe von f), dass die in c), d) und e) angegebenen Facetten bereits alle Facetten von STAB(G) sind.