Prof. Dr. Martin Skutella
Ronald Koch, Alexia Weber

11. Übungsblatt: Numerische Algorithmen / Numerische Lineare Algebra (Lineare Optimierung)

Abgabe: 21.06.2006, 10:00 Uhr (Briefkasten)

Aufgabe 35 (6 Punkte)
Definiere für $1 \leq k \leq d$ den *Hypersimplex*

$$\Delta_d(k) := \{x \in [0,1]^d : k-1 \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_d \leq k\}$$

Zur Information: $\Delta_d(1)$ ist ein d-dimensionaler Simplex. Ein Simplex ist die Verallgemeinerung von Dreieck und Tetraeder auf höherdimensionale Räume. Simplizes werden durch ihre Dimension d und die Anzahl der Ecken $d+1$ charakterisiert.
Wieviele Ecken und Facetten haben $\Delta_3(2)$ bzw. $\Delta_4(2)$?

Aufgabe 36 (10 Punkte)
Es seien $P = P(A,b) \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Polyeder mit $\operatorname{rang}(A) = n$ und $F \subseteq P$. Zeigt, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) F ist eine Kante von P.

b) F ist eine eindimensionale Seitenfläche von P.

c) F ist Seitenfläche von P, $|F| > 1$ und kein Punkt $x \in F$ ist echte Konvexkombination von mehr als zwei affin unabhängigen Elementen von P (d.h.: falls $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ mit $x_1,\ x_2,\ x_3 \in P$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $0 < \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 1$, dann ist $\{x_1, x_2, x_3\}$ affin abhängig).

d) $F = \operatorname{fa}(\operatorname{eq}(F))$ und $\operatorname{rang}(A_{\operatorname{eq}(F)}) = n-1$.

e) $\dim(F) = 1$ und es gibt ein $c \in \mathbb{K}^n$, so daß F aus allen Optimallösungen des linearen Programms $\max c^T x,\ Ax \leqslant b$ besteht.

Aufgabe 37 $(4+2$ Punkte$)$
Seien $P \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ Polyeder und sei $P + Q = \{x + y : x \in P, y \in Q\}$.

a) Zeigt, dass sich jede Ecke von $P+Q$ als Summe einer Ecke von P und einer Ecke von Q schreiben lässt.

b) Gegeben seien die LPs:

$$\begin{array}{rlll} \text{(LP)} & \max & c^T x, & \text{s.t.} \quad x \in P+Q \\ \text{(LP1)} & \max & c^T x, & \text{s.t.} \quad x \in P \\ \text{(LP2)} & \max & c^T x, & \text{s.t.} \quad x \in Q \end{array} \tag{LP}$$

Zeigt, dass es optimale Lösungen x und y von (LP1) und (LP2) gibt, so dass die Summe $x + y$ eine optimale Lösung von (LP) ist.

Aufgabe 38 (8 Punkte)

Löst folgendes Problem:

$$\begin{array}{rlllllll} \min & |x_1| & + & 2\,|x_2| & - & |x_3| & & \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 10 \\ & x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 12 \end{array}$$