

Prof. Dr. Martin Skutella

Ronald Koch, Alexia Weber

12. Übungsblatt:**Numerische Algorithmen / Numerische Lineare Algebra
(Lineare Optimierung)**

Abgabe: 28.06.2006, 10:00 Uhr (Briefkasten)

Aufgabe 39

(8 Punkte)

Löst folgendes LP mit dem Simplexalgorithmus. Verwendet dabei das verkürzte Tableau.

$$\begin{array}{rcll}
\max & x_1 & -7x_2 & -x_3 & -2x_4 & \\
\text{s.t.} & \frac{1}{2}x_1 & -\frac{9}{2}x_2 & -\frac{5}{2}x_3 & +11x_4 & \leq 0 \\
& \frac{1}{2}x_1 & -\frac{3}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +x_4 & \leq 0 \\
& & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0
\end{array} \tag{LP}$$

Aufgabe 40

(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Falls nicht anders angegeben, betrachten wir im folgenden immer ein LP in Standardform $\max c^T x$, s. t. $Ax = b$, $x \geq 0$, das die Generalvoraussetzungen für Kapitel 9 des Grötschel-Skripts erfüllt. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen, und mache Dir gegebenenfalls auch Gedanken darüber, welche *Teilaussagen* richtig oder falsch sind.

- Die zu einer Basis A_B gehörige Basislösung x ist genau dann optimal, wenn für die zugehörigen reduzierten Kosten $\bar{c} \leq 0$ gilt.
- A_B sei eine optimale Basis. Erhöht man nun den Wert einer Nichtbasisvariablen über Null und passt die Werte der Basisvariablen vermöge der Gleichung $x_B = \bar{b} - \bar{A}x_N$ an, so sinkt der Zielfunktionswert.
- Ist x eine nicht zulässige Basislösung und gilt für die zugehörigen reduzierten Kosten $\bar{c} \leq 0$, so ist $c^T x \geq c^T y$ für alle zulässigen Lösungen y .
- Hat das LP $\max c^T x$, s. t. $Ax = b$, $x \geq 0$ einen endlichen Optimalwert, so ist das LP $\max c^T x$, s. t. $Ax = b'$, $x \geq 0$ für alle b' beschränkt.
- Die Anzahl positiver x_j in einer zulässigen Basislösung überschreitet nicht den Rang der Matrix A .
- Die Anzahl der Optimallösungen sowie der zulässigen Basislösungen sind endlich.
- Zu jedem LP in n unbeschränkten Variablen gibt es ein äquivalentes LP in $n + 1$ nichtnegativen Variablen.

h) Die beiden LPs $\max c^T x$, s. t. $Ax \leq b$ und $\max -c^T x$, s. t. $Ax \leq b$ können beide zulässige Lösungen mit beliebig großem Zielfunktionswert haben.

Aufgabe 41

(6 Punkte)

Beweist oder widerlegt:

Besitzt ein LP eine nicht-degenerierte optimale Basislösung, so besitzt das duale LP eine eindeutige Optimallösung.

Aufgabe 42

(WM – Aufgabe : 10 WM – Punkte)

Die folgende Karte zeigt alle deutschen Fifa-WM-Stadien.



Franz Beckenbauer möchte möglichst viele Spiele der diesjährigen Weltmeisterschaft sehen und reist deshalb per Hubschrauber von einem Stadion zum nächsten. Da die letzten Spiele der Phase 1 parallel stattfinden, muss Franz sich nun leider zwischen einigen Spielen entscheiden. Er wählt nun die Spiele so aus, dass er mit seinem Hubschrauber möglichst wenig Entfernung zurücklegen muss. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Entfernung der WM-Stadien in Luftlinie (die Angaben sind möglicherweise nicht genau).

	B	DO	F	GE	HH	H	KL	K	L	M	N	S
B	-	430	440	455	275	265	530	500	150	500	360	520
DO	430	-	180	30	280	180	220	80	340	470	350	320
F	440	180	-	210	400	275	100	160	290	300	190	140
GE	455	30	210	-	290	190	240	80	370	500	370	340
HH	275	280	400	290	-	130	480	370	310	610	460	540
H	265	180	275	190	130	-	360	260	230	500	340	410
KL	530	220	100	240	480	360	-	170	380	330	260	120
K	500	80	160	80	370	260	170	-	380	460	340	280
L	150	340	290	370	310	230	380	380	-	340	200	360
M	500	470	300	500	610	500	330	460	340	-	150	200
N	360	350	190	370	460	340	260	340	200	150	-	180
S	520	320	140	340	540	410	120	280	360	200	180	-

Franz startet in Stuttgart und möchte zum ersten Achtelfinale in München sein, d.h. seine Tour soll in München enden. Die Spiele, die parallel stattfinden, sind folgende:

20-Jun-2006	Berlin	ECU:GER	16:00 Uhr
20-Jun-2006	Hannover	CRC:POL	16:00 Uhr
20-Jun-2006	Köln	SWE:ENG	21:00 Uhr
20-Jun-2006	Kaiserslautern	PAR:TRI	21:00 Uhr
21-Jun-2006	Gelsenkirchen	POR:MEX	16:00 Uhr
21-Jun-2006	Leipzig	IRN:ANG	16:00 Uhr
21-Jun-2006	Frankfurt	NED:ARG	21:00 Uhr
21-Jun-2006	München	CIV:SCG	21:00 Uhr
22-Jun-2006	Hamburg	CZE:ITA	16:00 Uhr
22-Jun-2006	Nürnberg	GHA:USA	16:00 Uhr
22-Jun-2006	Dortmund	JPN:BRA	21:00 Uhr
22-Jun-2006	Stuttgart	CRO:AUS	21:00 Uhr
23-Jun-2006	Kaiserslautern	KSA:ESP	16:00 Uhr
23-Jun-2006	Berlin	UKR:TUN	16:00 Uhr
23-Jun-2006	Köln	TOG:FRA	21:00 Uhr
23-Jun-2006	Hannover	SUI:KOR	21:00 Uhr

Formuliert des Kaisers Problem als lineares Programm mit ganzzahligen Variablen und macht dem Franz einen Vorschlag, welche Spiele er sich anschauen soll?

Programmieraufgabe 2

Die zweite Programmieraufgabe besteht darin, den dualen Simplexalgorithmus zu implementieren. Als erste Teilaufgabe sollt Ihr dazu Euren Simplexalgorithmus so abändern, dass er auf dem verkürzten Tableau arbeitet. Details dazu findet Ihr auf unserer Homepage.