Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

10.04.2006

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) WS 2006

Blatt 2

Erstellen Sie für die folgenden Aufgaben 4–6 jeweils ein präzises mathematisches Modell!

Aufgabe 4
a) N Paare besuchen einen Tanzkurs. Wie groß ist – nach zufälligem Partnerwechsel – die Wahrscheinlichkeit, daß keine Dame mit ihrem eigenen Partner tanzt.
a) Kindergeburtstag: N Kinder bringen "Preise" für eine Lotterie mit. Jedes Kind erhält genau einen Preis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau k Kinder ihren eigenen Preis gewinnen?

Aufgabe 5)*
a) In Hörsaal E 29 befinden sich $N \leq 365$ Personen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. (Dabei sind – nicht ganz der Realität entsprechende – Annahmen nötig, die die Gleichverteilungsvoraussetzung rechtfertigen: Schaltjahre und Geburtstage am 29. Februar werden nicht berücksichtigt, es wird angenommen, daß Geburten an den 365 Tagen des Jahres stets mit gleicher Häufigkeit stattfinden.)
b) Eine Umfrage im Hörsaal ergibt, daß k der N Personen am ersten April Geburtstag haben und daß alle übrigen an verschiedenen Tagen Geburtstag feiern. Wie wahrscheinlich ist dieses Ereignis?

Aufgabe 6
a) Aus einemKarton mit $N = 100$ Glühbirnen werden zur Qualitätskontrolle $k = 4$ Glühbirnen zufällig herausgegriffen, getestet und *nicht* zurückgelegt. Der Karton wird nur angenommen, wenn alle k Glühbirnen ohne Defekt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit durchläuft ein Karton mit $p = 30$ defekten Glühbirnen dieses Kontrollsystem unbeanstandet?
b) Es wird mit 4 (idealen) Würfeln gewürfelt, dabei werden die Augenzahlen $a(i), 1 \leq i \leq 4$ notiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man mit den gewürfelten Augen $a(i)$ eine der "Figuren" $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$ oder $\{4, 5, 6\}$ bilden kann?

Aufgabe 7 $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_N\}$ und $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots \lambda_K\}$ seien endliche Mengen. Es sei $\widetilde{\Omega}$ die Menge *aller* Abbildungen von Ω nach Λ. $\widetilde{S}$ bezeichne die Menge der *surjektiven* Abbildungen in $\widetilde{\Omega}$.
a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $\widetilde{\Omega}$ und von $\widetilde{S}$.
b) Wie groß ist (bei Gleichverteilung) die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällige ausgewählte Abbildung zwischen zwei endlichen Mengen surjektiv ist.
Hinweis zu a) Bestimmen Sie card $\complement\widetilde{S}$ mittels der Siebformel.
c) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Formel:

$$\text{card}\,\{f : \{1, \ldots N\} \to \{1, \ldots, K\} \text{ mit } \text{card} f^{-1}\{i\} = j_i \ (1 \leq i \leq K)\} = \tfrac{N!}{j_1! \cdots j_K!}.$$

Dabei sind $j_i \geq 0$, $\sum j_i = N$ sowie $K \leq N$ vorausgesetzt.
d) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Formel erneut card$\widetilde{S}$.

Aufgabe 8*
a) Sei $\widetilde{\Omega} := \mathrm{Per}(r, n)$, $\Omega := \mathrm{Komb}(r, n)$ und sei $\pi : f \mapsto [f]$ die kanonische Abbildung. Weiter sei $\widetilde{W}$ die Gleichverteilung auf $\widetilde{\Omega}$. Bestimmen Sie die Bildverteilung $\pi(\widetilde{W})$.
b) Verfahren Sie ebenso für $\widetilde{\Omega} := \mathrm{PerW}(r, n)$ und $\Omega := \mathrm{KombW}(r, n)$.
b) Verdeutlichen Sie die Ergebnisse in a) und b) mittels einfacher Zahlenbeispiele, etwa $n = 3$, $r = 2$.

Abgabe: in den Kästen im Foyer bis Mittwoch, 19.4.06

Sprechstunden im SoSe 2006
W. Hazod: *Dienstag, 11–12, Mittwoch, 12–13: M 627*
Tel.: 3055 e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de
P. Becker-Kern: *Dienstag, 10–11: M 625*
Tel.: 3099 email: pbk@mathematik.uni-dortmund.de
K. Kosfeld: *Dienstag, 10–11 : M 630*
Tel.: 5917 e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de
Dominik Langenscheidt: *Mittwoch 12 - 13: M 613*
*Tel.: 3432 e-mail: dominik.langenscheidt@**uni-dortmund.de***

Zusatzübungen Lehramt:
N. Thyssen: *Dienstag, 10–11: M 613*
Tel.: 3432 e-mail: nadine.thyssen@uni-dortmund.de