Universität Dortmund 20.04.2006
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) SoSe 2006

Blatt 3

Erstellen Sie für die folgenden Aufgaben jeweils ein präzises mathematisches Modell!

Aufgabe 9 Sortiertheit von Listen Eine Liste von n (verschiedenen) Symbolen $\{a_1, \dots, a_n\}$ ist nach einem gewissen Merkmal zu sortieren. O.B.d.A. nehmen wir also an, daß die a_i natürliche Zahlen aus $\{1, \dots, n\}$ sind, indem wir das Symbol mit dem Rang des beobachteten Merkmals identifizieren. Für die Effizienz des Algorithmus ist das Wissen um die Vorsortiertheit der Liste wichtig. Eine Liste $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ heißt in den Punkten $\{i_1, \dots i_k\}$ vorsortiert, wenn für diese Indices gilt $a_{i_j} = i_j, \; 1 \leq j \leq k$. (Dabei ist $1 \leq k \leq n$.)
Setzen Sie Gleichverteilung auf der Menge aller Anordnungen der a_i voraus und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß eine Liste an genau k Punkten vorsortiert ist.

Aufgabe 10
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällige Permutation in $\Omega := \mathrm{Per}(r, r)$ höchstens k Fixpunkte besitzt ($k \leq r$).
b) Unter 55 Hörern einer Vorlesung gibt es 3 Geburtstagszwillinge, die Geburtsdaten aller übrigen Hörer sind verschieden. Wie wahrscheinlich ist dieses Ereignis?
b1) Bestimmen Sie dazu zunächst die Anzahl aller k-Tupel von paarweise disjunkten Paaren $\{\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\} \cdots \{i_k, j_k\}\}$, die man in $M_r = \{1, \dots r\}$ bilden kann.

Aufgabe 11 In einem Hörsaal befinden sich N Hörer. Sie werden nach Merkmalsgruppen eingeteilt, darunter A_1 *männlich*, A_2 *Blutgruppe* 0, A_3 *mathematisch begabt*. Die Merkmale treten mit folgenden Häufigkeiten auf:

A_1 50 %	A_2 20 %	A_3 50 %
A_1 und A_2 10 %	A_1 und A_3 30 %	A_2 und A_3 10 %
A_1 und A_2 und A_3 zugleich 5 %		

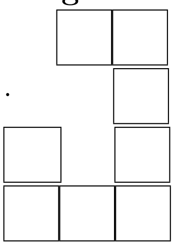
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Hörer
a) mindestens eines der drei Merkmale $A_i, 1 \leq i \leq 3$
b) weder die Merkmale A_1 noch A_2
c) eines der Merkmale A_1 oder A_3
d) genau zwei der drei Merkmale ?

Aufgabe 12
a) In einer Urne befinden sich w weiße, r rote und s schwarze Kugeln. Es wird r

Mal gezogen, **a)** *ohne* **b)** *mit* Zurücklegen.
Wie groß ist – im Fall a) bzw b) – die Wahrscheinlichkeit,

a1) dabei k weiße Kugeln zu ziehen,
a2) beim k-ten Zug weiß zu ziehen,
a3) beim k-ten Zug *erstmals* weiß zu ziehen.
Stellen Sie geeignete Modelle auf! Zeigen Sie, daß es genügt, Modelle mit nur zwei Farben zu betrachten!
b) Mit einem Würfel wird fünf Mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß alle geworfenen Augenzahlen voneinander verschieden sind.
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Roulette nach dreißig Spielen alle erzielten Zahlen verschieden sind.

Aufgabe 13 a) Gegeben sei ein J-förmiger Gegenstand (siehe Skizze).



Dabei sei die Seitenlänge eines einzelnen Quadrats gleich 1cm. Auf einer Tischplatte werden parallele Linien im Abstand von 10 cm gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Gegenstand, wenn er *zufällig* auf die Platte geworfen wird, eine der Linien schneidet?

b) Zwei Studenten (geschlechtsneutral) besuchen täglich die Mensa. Die Mensa öffnet um 12 Uhr und läßt nach 13 Uhr keine Gäste mehr ein. Bei beiden ist der Ankunftszeitpunkt zufällig und im Intervall [12,13] gleichverteilt. Beide verbringen täglich exakt 15 Minuten in der Mensa.Wie groß ist die Wahrscheinlichzkeit, daß sie sich zur selben Zeit dort aufhalten? [Stellen Sie die Ankunft der beiden als Punkt im $\mathbb{R}^2$ dar, der im Quadrar $[12, 13]^2$ gleichverteilt ist.]

Aufgabe 14 Ein Fußball entsteht, indem man von einen regulären Körper mit 12 Ecken, der begrenzt ist von 20 gleichseitigen Dreiecken, die Ecken abschneidet. Dabei werde eine jede Seite s in der Höhe $s/3$ und $2s/3$ geschnitten. Da an jeder Ecke 5 Kanten zusammenstoßen, entsteht durch das Abschneiden jeder Ecke ein reguäres 5 Eck mit Seitenlänge $s/3$, und von den Dreiecken verbleibt ein reguläres 6-Eck mit Seitenlänge $s/3$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Elfmeterschießen ein Fünfeck getroffen wird? [Berechnen Sie die Fläche eines 5 Ecks und eines 6-Ecks !]

Aufgabe 15 Das *Roulette Spiel* (B. Pascal, 1765):
A Das klassische Roulette.
Eine Kugel ermittelt eine der Zahlen aus $\{0, 1, \ldots 36\}$. Der Spieler kann auf *einzelne Zahlen* oder auf *einfache Chancen* (chances simples) setzen, also auf *pair* d.h. gerade Zahlen in $\{1, \ldots, 36\}$, oder *impair*, das Komplement (wieder ohne 0), analog *manque* $\{1, \ldots, 18\}$ bzw. *passe* $\{19, \ldots, 36\}$, resp. *rouge* $\{1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36\}$ bzw. *noir* die restlichen Zahlen in $\{1, \ldots, 36\}$. Die Null (*zero*) ist grün!
B Das französische Roulette.
Diese Variante spielt eine Sonderrolle, sie wird erst zu einem späteren Zeitpunkt behandelt: Wenn auf eine der einfachen Chancen oder auf eine Zahl aus $\{1, \ldots, 36\}$ gesetzt wurde und *zero* fällt, dann wird der Einsatz eingefroren bis zur nächsten

Runde. (Wenn auch hier 0 fällt, wird abermals eingefroren etc.)
C Amerikanisches Roulette.
Wie in A (ohne Einfrieren), aber es gibt neben *zero* eine Doppelnull mit gleicher Funktion, also auch grün.
D Mexikanisches Roulette (für Gringos)
Wie die amerikanische Variante, aber zusätzlich eine dreifache Null.

Bestimmen Sie in A), C), D) jeweils die Gewinnchancen,
wenn auf *Zahl* gesetzt wurde, und
wenn auf eine *einfache Chance* gesetzt wurde.

Aufgabe 16 $A_1, A_2, A_3 \in \Sigma$ seien Ereignisse eines Wahrscheinlichkeitsraumes.
a) Sei $T := (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$.
Stellen Sie das Ereignis T als Vereinigung paarweise disjunkter Ereignisse dar:
$T = (A_1 \cap A_2 \cap \complement A_3) \mathbin{\dot\cup} (A_1 \cap \complement A_2 \cap A_3) \mathbin{\dot\cup} (\complement A_1 \cap A_2 \cap A_3) \mathbin{\dot\cup} (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
b) Seien $W(A_i) =: p_i,\ q_i := 1 - p_i$ mit $p_i \in (0,1)$. Es gelte
$W(A_i \cap A_j) = W(A_i) \cdot W(A_j)$ sowie $W(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p_1p_2p_3$.
Zeigen Sie: $W(T) = p_1p_2p_3 + p_1p_2q_3 + p_1p_3q_2 + p_2p_3q_1$
c) Ein Sicherheitssystem enthalte einen Schaltkreis bestehend aus drei Modulen, die so verbunden sind, daß das System ausfällt, sobald mindestens zwei Module ausgefallen sind. Die Lebensdauern L_i der einzelnen Module haben die gleiche Verteilung, d.h. für $t \geq 0$ ist $R(t) := W(L_i > t)$ unabhängig von i.
Versuchen Sie eine Formel für die Verteilungsfunktion der Lebensdauer S des gesamten Schaltkreises zu finden, d.h. für die Wahrscheinlichkeiten $W(S \leq t)$, resp. für $W(S > t)$.
$\Big[\!\!\Big[$ Setzen Sie für $t > 0$ $A_i := A_i(t) := \{L_i > t\}$. Welchen Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit Sie den Aufgabenteil b) anwenden können? $\Big]\!\!\Big]$

Abgabe der ersten 4 Aufgaben:
in den Kästen im Foyer bis Mittwoch, 27.4.06 16 Uhr

Sprechstunden im SoSe 2006
W. Hazod: *Dienstag, 11–12, Mittwoch, 12–13: M 627*
Tel.: 3055 e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de
P. Becker-Kern: *Dienstag, 10–11: M 625*
Tel.: 3099 email: pbk@mathematik.uni-dortmund.de
K. Kosfeld: *Dienstag, 10–11 : M 630*
Tel.: 5917 e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de
Dominik Langenscheidt: *Mittwoch 12 - 13: M 613*
*Tel.: 3432 e-mail: dominik.langenscheidt@**uni-dortmund.de***

Zusatzübungen Lehramt:
N. Thyssen: *Dienstag, 10–11: M 613*
Tel.: 3432 e-mail: nadine.thyssen@uni-dortmund.de