Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

29.04.2006

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) SoSe 2006

Blatt 4

Aufgabe aus aktuellem Anlaß

a) Ein Fußball ist in erster Näherung eine Kugel mit Radius R. Produktionsbedingt schwankt der **Radius** $\mathcal{R}$ um den Sollwert $\mathcal{R}_0$, und zwar ist die Verteilung von $\mathcal{R}$ eine Gleichverteilung in $[\mathcal{R}_0 - \epsilon, \mathcal{R}_0 + \epsilon]$. Geben Sie die Verteilungsfunktionen und die Dichten **a1)** der Oberfläche $\mathcal{O}$ und **a2)** des Volumens $\mathcal{V}$ an.

b) Nun sei (mit den Bezeichnungen von a)) bekannt, daß die **Oberfläche** $\mathcal{O}$ gleichverteilt ist in $[\mathcal{O}_0 - \alpha, \mathcal{O}_0 + \alpha]$. Geben Sie die Verteilungsfunktionen und Dichten von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{V}$ an.

Aufgabe 17 **a)** Drei Gefangene werden durch ihren Wärter davon informiert, daß einer von ihnen auf gut Glück ausgewählt wurde, um als warnendes Beispiel exekutiert zu werden, während die anderen beiden auf freien Fuß gesetzt würden. Ein Gefangener bittet den Wärter, ihm im Vertrauen einen von seinen Mitgefangenen zu benennen, der freigelassen würde. Dabei wies er darauf hin, daß diese Information ja doch nicht viel wert sei, da er ja bereits wüßte, daß einer der beiden freigelassen würde. Der Wärter verweigerte die Auskunft: Die Chancen des Fragestellers exekutiert zu werden, würden sonst von 1/3 auf 1/2 steigen, da dann nur noch 2 mögliche Todeskandidaten übrig blieben.

b) *(Ziegenbeispiel)* Bei einer Fernsehveranstaltung findet ein Glückspiel statt: Der Kandidat steht vor 3 (gleichartigen) Türen. Er weiß, daß hinter einer ein neues Auto als Preis steht, hinter den beiden anderen je eine Ziege. Der Spieler wählt eine Tür auf gut Glück.
Nun hält der Spielleiter – der die Position des Hauptgewinns kennt – das Spiel an, öffnet eine der beiden anderen Türen, hinter der sich eine Ziege befindet. Der Kandidat darf nun nochmals überlegen, ob er bei seiner Wahl bleiben will, oder die andere verbliebene Tür wählt. Was soll der Spieler tun?

Aufgabe 18 *Computerdiagnose für eine Krankheit*

a) Eine Krankheit K kommt in einer bestimmten Bevölkerungsgruppe mit 5% Häufigkeit vor. Sie sei durch eine Reihe von Symptomen S (z.B. Fieber, Blutdruck Alter ...) hinreichend genau beschrieben. Die Symptome werden in qualitativen bzw. quantitativen Abstufungen erfaßt. Der bei einem Patienten beobachtete Symtomkomplex komme bei einem Patienten mit 13% Häufigkeit vor, wenn er an K erkrankt ist, dagegen nur mit 0,2%, wenn K nicht vorliegt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein Patient mit den Symptomen S an der Krankheit K leidet.

b) Oft muß der Arzt bei einem Patienten an mehrere Krankheiten von verschiedener Gefährlichkeit und verschiedenen Heilungsaussichten denken. In die engere Wahl seien die Diagnosen $A,\ B,\ C$ gekommen, die mit den Häufigkeiten 80%, bzw.

15% bzw. 5% auftreten. Die Mißerfolgsquote bei Behandlung nach richtiger bzw. falscher Diagnose ergibt sich aus folgender Tabelle:

wahre Krankheit	Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Diagnose	Mißerfolgsquote bei Behandlung als Krankheit		
		A	B	C
A	80%	1%	2%	2%
B	15 %	20 %	5%	30%
C	5%	50%	50%	10 %

b1) Es werde nach A behandelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines Mißerfolgs? (Verfahren Sie analog bei B und C).
b2) Welche Vorgehensweise würden Sie dem Arzt empfehlen?

Aufgabe 19 An einer Universität werden in den Studiengängen S_1, ... S_6 Bewerber ausgewählt. Nach Abschluß des Auswahlverfahrens erhält man:

Studien-gang Nr:	**Männliche Bewerber**	davon zugelassen	in%	**Weibliche Bewerber**	davon zugelassen	in %
1	825	512		108	89	
2	560	353		25	17	
3	325	120		593	226	
4	417	138		375	131	
5	191	53		393	114	
6	373	22		341	24	
gesamt						

Dies ergibt insgesamt eine höhere Zulassungsquote für Männer als für Frauen. Diese Diskriminierung steht im Widerspruch zur Situation in jedem einzelnen Studiengag. (Berechnen Sie die Zulassungsquoten insgesamt und in S_i.) Wie könnte man das erklären?
Hinweis: Entwerfen Sie ein mathematisches Modell auf folgende Weise:
Seien $\Omega := \{\text{Bewerber}\}$, $Z := \{\text{zugelassene Bewerber}\}$, $\Omega_i := \{\text{Bewerber im Studiengang } S_i\}$, $M := \{\text{männliche Bewerber}\}$, $\complement M := \{\text{weibliche Bewerber}\}$. Berechnen Sie $W(Z|M)$ und $W(Z|\complement M)$.

Aufgabe 20 Im folgenden seien stets F eine *Verteilungsfunktion* auf $\mathbb{R}$ mit *Wahrscheinlichkeitsdichte* f und Verteilungsfunktion F. $c > 0$ bezeichne eine Normierungskonstante.
Bestimmen Sie im folgenden jeweils die Dichte f bzw. die Verteilungsfunktion F und ggf. die Konstante $c > 0$. Fertigen Sie in den Beispielen a) - h) jeweils Skizzen von f und F an!
a) (*Dreiecks*verteilung, *Simpson*verteilung): Sei $a < b$.
$f(x) := c \cdot \left((x-a) \cdot 1_{(a,(a+b)/2)}(x) + (b-x) \cdot 1_{((a+b)/2,\ b)}(x)\right)$
b) (*Weibull*verteilung, *Rayleigh*verteilung.) $F(x) := \left(1 - e^{-x^{\alpha}}\right) \cdot 1_{\mathbb{R}_+}(x)$, $\alpha > 0$. Allgemeiner: $F(x) := \left(1 - e^{-\gamma \cdot x^{\alpha}}\right) \cdot 1_{\mathbb{R}_+}(x)$, $\alpha, \gamma > 0$.
c) (*Max-stabile* Verteilung Typ Φ_α) $F(x) := e^{-x^{-\alpha}} \cdot 1_{\mathbb{R}_+^*}(x)$, $\alpha > 0$. Allgemeiner: $F(x) := e^{-\gamma \cdot x^{-\alpha}} \cdot 1_{\mathbb{R}_+^*}(x)$, $\alpha, \gamma > 0$.

Welche Beziehung besteht zwischen den Verteilungen des Typs b) und c?
d) (*Max-stabile* Verteilung Typ Λ) Sei $\gamma > 0$. $F(x) := \exp(-\gamma \cdot \exp(-x)),\ x \in \mathbb{R}$
e) *Beta*verteilungen B(2,2): $f(x) := c \cdot (x \cdot (1-x)) \cdot 1_{[0,1])}(x)$
Allgemeiner: für $\alpha, \beta > 0$: $f(x) := c \cdot \left(x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}\right) \cdot 1_{[0,1])}(x)$
f) (*Pareto*verteilung) $f(x) := c \cdot x^{-\beta} \cdot 1_{[1,\infty)}(x)$, $\beta > 1$.
g) (*Potenz*verteilungen) bzw. $f(x) := c \cdot x^{-\beta} \cdot 1_{[a,b]}(x)$, $\beta > 0, 0 \leq a < b$.
h) Ebenso: **(i)** (*Standard Cauchy*) $F : x \mapsto \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan(x)\right)$
(ii) *Arcussinus Verteilung* $F : x \mapsto \frac{2}{\pi}\left(\arcsin(x^{1/2})\right),\quad 0 \leq x \leq 1.$
(iii) (*Maxwell*verteilung) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot x^2 \cdot e^{-x^2/2} \cdot 1_{\mathbb{R}_+}(x)$

Aufgabe 21 ξ sei eine reellwertige Zufallsvariable, deren Verteilung eine
a) Weibullverteilung bzw. **b)** Paretoverteilung ist. (Vgl. Aufgabe 20)
Bestimmen Sie im Falle a) bzw. b) die Restlebensdauer, d.h. die bedingte Wahrscheinlichkeit $W(\xi > t + x | \xi > t)$ (für $t, x > 0$) .
c) Analog: Geben Sie für eine geometrisch ($\mathrm{Geo}_r(q)$) verteilte Zuvallsvariable ξ die Restlebensdauer $W(\xi > k + n | \xi > k)$ (für $k,\ n \in \mathbb{Z}$) an. (Dabei ist $r \in \mathbb{Z},\ 0 < q < 1$).
d) Sei ξ wie in b) Pareto verteilt. Sei $Y := 1/\xi$ auf $(0, \infty)$.
Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y. Geben Sie die Restlebensdauerverteilungsfunktionen $x \mapsto W(Y \leq x + t | Y > t)$ an.

Aufgabe 22 **a)** μ sei die Gleichverteilung auf dem Parabelabschnitt $\mathcal{P} := \{(x,y) : x^2 \leq y \leq 1\}$. Geben Sie die Dichten der Randverteilungen $\lambda_i := \pi_i(\mu)$ an, $i = 1, 2$.
b) Berechnen Sie die Dichten der Randverteilungen $\lambda_i := \pi_i(\mu)$, $i = 1, 2$, wenn μ durch die Dichte $f : (x,y) \mapsto c \cdot x \cdot y \cdot 1_{\{(u,v):\ 0 \leq u \leq v \leq 2\}}(x,y)$ gegeben ist.
c) T sei die stetige monotone Abbildung $x \mapsto 0$ für $|x| \leq 1$, $x \mapsto x - 1$ für $x \geq 1$ und $x \mapsto x + 1$ für $x \leq -1$. Geben Sie die Verteilungsfunktion von $\mu := T(N_{0,1})$ an. Hat μ eine Dichte?
d) Die Zufallsvariable X sei verteilt nach $N_{0,1}$. Geben Sie die Verteilungsfunktionen von **d1)** $Y := e^X$, von **d2)** $Z := X^2$ bzw. von **d3)** $U := |X|$ an.
e) Im Punkt $(0,0)$ befindet sich eine Lichtquelle, die einen vertikalen Strahl auf einen drehbaren Spiegel sendet, der im Punkt $(0,1)$ befestigt ist. Der Spiegel, der mit der Abszisse einen Winkel $\varphi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ einschließt, reflektiert den Lichtstrahl, dieser trifft die Abszisse in einem Punkt im Abstand $X = X(\varphi)$ vom Punkt $(0,0)$. Der Winkel φ sei zufällig, und zwar gleichverteilt in $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen X.

Abgabe der ersten 5 Aufgaben:
in den Kästen im Foyer bis Mittwoch, 17.05.06 16 Uhr

Sprechstunden im SoSe 2006

W. Hazod: *Dienstag, 11–12, Mittwoch, 12–13: M 627*

Tel.: 3055 e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de

P. Becker-Kern: *Dienstag, 10–11: M 625*

Tel.: 3099 email: pbk@mathematik.uni-dortmund.de

K. Kosfeld: *Dienstag, 10–11 : M 630*

Tel.: 5917 e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de

Dominik Langenscheidt: *Mittwoch 12 - 13: M 613*

*Tel.: 3432 e-mail: dominik.langenscheidt@****uni-dortmund.de***

Zusatzübungen Lehramt:

N. Thyssen: *Dienstag, 10–11: M 613*

Tel.: 3432 e-mail: nadine.thyssen@uni-dortmund.de