**Universität Dortmund** 18.05.2006
**Lehrstuhl Mathematik IV**
**Prof. Dr. W. Hazod**

# Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) SoSe 2006

Blatt 6 : Markoffketten

Geben Sie zu den nachstehenden Übergangsmatrizen in A 27 – A 30 von zeitlich homogenen Markoffketten die Übergangsgraphen und die invarianten Verteilungen an. Geben Sie die 2- und 3-Schritt Übergangsmatrizen an. Was läßt sich über das Langzeitverhalten aussagen?

**Aufgabe 26**
Bei der Übertragung von "Punkten" und "Strichen" in einem Fernmeldesystem werden durch Störungen im Mittel $\alpha$ % der gesendeten Punkte als Striche und $\beta$ % der gesendeten Striche als Punkte empfangen. Das Verhältnis von gesendeten Punkten zu gesendeten Strichen sei $R > 0$.
**a)** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein gesendetes Signal richtig empfangen wird?
**b)** Es wird das Signal *Punkt* [bzw. *Strich*] empfangen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß auch *Punkt* [bzw. *Strich*] gesendet wurde?
**c)** Der empfangene Text wird weitergesendet. Die Zufallsvariablen $\xi_n : \Omega \to \{\cdot, -\} \cong \{0,1\}$ geben das Signal nach der n-fachen Übertragung an, $n \in \mathbb{N}$. Überlegen Sie, unter welchen Voraussetzungen man annehmen darf, daß eine zeitlich homogene Markoff-Kette vorliegt.

**Aufgabe 27**

**a)** $P = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1-2b & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** Analog: $P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dabei seien $0 < a < 1,\ 0 < b < 1/2$.
**c)** Seien $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1, \alpha + \beta + \gamma = 1$. Die (Dreiband-)Übergangsmatrix $P = (p_{i,j}), 1 \le i, j \le 4$, sei definiert durch
$p_{i,i+1} = \alpha, p_{i,i} = \beta, p_{i+1,i} = \gamma, 1 < i < 4, p_{1,1} = p_{4,4} = 1$.

**Aufgabe 28** **a)** $P$ sei eine Dreibandmatrix, die Kette habe *einen* Friedhof.

$$P = \begin{pmatrix} r_1 & p_1 & 0 & 0 \\ q_2 & r_2 & p_2 & 0 \\ 0 & q_3 & r_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(dabei seien } q_1 = 0, q_i + r_i + p_i = 1, 1 \le i \le 3\text{)}$$

Analog: Eine Kette mit *zwei* Friedhöfen bzw. *ohne* Friedhof:

**b)** $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & r_2 & p_2 & 0 \\ 0 & q_3 & r_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $P = \begin{pmatrix} r_1 & p_1 & 0 & 0 \\ q_2 & r_2 & p_2 & 0 \\ 0 & q_3 & r_3 & p_3 \\ 0 & 0 & q_4 & r_4 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 29** In **a)** sei $P$ die Übergangsmatrix eines Erneuerungsprozesses, in **b)** sei $Q$ eine Übergangsmatrix, die zu einem *Labyrinth mit Ratte* gehört:

**a)** $P = \begin{pmatrix} q_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & 0 & p_2 & 0 & 0 \\ q_3 & 0 & 0 & p_3 & 0 \\ q_4 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Zu b)** Geben Sie auch das Labyrinth an.
In welchem Raum sollte man die Rattenfalle aufstellen?

**Aufgabe 30** *Ehrenfest Diffusionsmodell.* Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Teilchen, die sich in einem durch eine durchlässige Membran in zwei gleich große Hälften geteilten Gefäß befinden. $\xi_k$ sei die Anzahl der Teilchen in der rechten Gefäßhälfte zur Zeit $k$. Falls sich zur Zeit $k$ in der rechten Hälfte $i$ Teilchen befinden, sei die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen von rechts nach links wechselt $i/n$ und die Wahrscheinlichkeit von links nach rechts zu wechseln sei $(n-i)/n$. Dies gilt für $1 \leq i \leq n-1$. Ist $\xi_k = 0$ (bzw. $\xi_k = n$) so ist mit Wahrscheinlichkeit 1 zum nächsten Zeitpunkt $\xi_{k+1} = 1$ (bzw. $\xi_{k+1} = n-1$). (Reflektierende Zustände.)
**a)** Stellen Sie die Übergangsmatrix und den Übergangsgraphen auf. Zeigen Sie, daß durch $\overrightarrow{\pi} = (\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2^n} : 0 \leq k \leq n)$ – also die Binomialverteilung mit $p = q = 1/2$ – eine invariante Verteilung gegeben ist.
**b)** Geben Sie dazu ein passendes Urnenmodell an.
**c)** Interpretieren Sie das Ergebnis für **c1)** *kleine* bzw **c2)** *große* Teilchenzahlen $n$. Die Erfahrung lehrt, daß letztendlich in den beiden Hälften gleich viel Teilchen sein werden. Gilt dies auch in diesem Modell?

**Aufgabe 31** *Schriftlich zu bearbeiten. Z.B. anhand der Beweisskizze in der Vorlesung* **a)** Beweisen Sie, daß für einen Wahrscheinlichkeitsraum gilt: Sei $C = \dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{Z}_+} C_i$ mit $C_i \in \Sigma$ und $W(C) > 0$. Sei $W(A|C_i) = p$ für alle $i$. Dann ist auch $W(A|C) = p$.
[[ **Hinweis**: Betrachten Sie $W(A|C_i) \cdot W(C)$. ]]
**b)** Sei $(\xi_n)$ ein stochastischer Prozeß mit Zeit $n \in \mathbb{Z}_+$ und Zustandsraum $X = \{x_i; i = 1, \ldots, N\}$. Beweisen Sie: Der Prozeß ist eine Markoffkette genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $(i_{n+1}, i_n, i_{n-1}, \ldots i_0; j_{n-1}, \ldots j_0) \subseteq \{1, \ldots N\}$ gilt:

$$W(\xi_{n+1} = x_{i_{n+1}} | \xi_n = x_{i_n}, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_0 = x_{i_0}) = W(\xi_{n+1} = x_{i_{n+1}} | \xi_n = x_{i_n}, \xi_{n-1} = x_{j_{n-1}}, \ldots, \xi_0 = x_{j_0}).$$

**Abgabe der Aufgaben:**
**in den Kästen im Foyer nach Möglichkeit bis Freitag, 26.05.06 12 Uhr**

***Sprechstunden im SoSe 2006***
***W. Hazod:*** *Dienstag, 11–12, Mittwoch, 12–13: M 627*
*Tel.: 3055 e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de*
***P. Becker-Kern:*** *Dienstag, 10–11: M 625*
*Tel.: 3099 email: pbk@mathematik.uni-dortmund.de*
***K. Kosfeld:*** *Dienstag, 10–11 : M 630*
*Tel.: 5917 e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de*
***Dominik Langenscheidt:*** *Mittwoch 12 - 13: M 613*
*Tel.: 3432 e-mail: dominik.langenscheidt@**uni-dortmund.de***
**Zusatzübungen Lehramt:**
***N. Thyssen:*** *Dienstag, 10–11: M 613*
*Tel.: 3432 e-mail: nadine.thyssen@uni-dortmund.de*