Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

25.05.2006

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) SoSe 2006

Blatt 7 Markoff Ketten II

Bearbeiten Sie die folgenden Aufagaben nach Möglichkeit schriftlich. Es können nicht alle Aufgaben in den Übungen besprochen werden.

Aufgabe 32 Happy Harry

Happy Harry ist ein zerstreuter Professor. Er besitzt zwei Regenschirme, die er in seiner Wohnung und in seinem Institut deponiert hat. Regnet es und ist Happy Harry unterwegs zur Wohnung oder zur Arbeit, dann nimmt er einen Schirm mit, sofern vorhanden. Harry ist sehr zerstreut und achtet nicht darauf, daß stets ein Schirm an jedem Ort ist. Es regnet mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ und Happy Harry geht täglich zu Fuß zur Arbeit oder nach Hause, unabhängig vom Wetter.

a) Sei $\xi_n : \Omega \to \{0,1,2\}$ die Zufallsvariable, die angibt, wie viele Schirme sich zur Zeit n an Harrys Aufenthaltsort befinden. Zeigen Sie: $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bildet eine homogene Markoffkette. (Begründen Sie die Markoffeigenschaft!) Stellen Sie den Übergangsgraphen auf.

b) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix P und geben Sie die ersten Potenzen an. Ist der Satz von Markoff anwendbar?

c) Bestimmen Sie die invarianten Verteilungen.

d) Soviel Zerstreutheit kann sich rächen: Vor dem ersten Gang zum Institut hatte Harry 2 Schirme in seiner Wohnung. Gegen welchen Grenzwert konvergiert die Wahrscheinlichkeit, daß Harry ohne Schirm unterwegs ist?

e) Gegen welchen Grenzwert konvergiert die Wahrscheinlichkeit, daß H.H. naß wird?

Benutzen Sie in e) den Begriff der Unabhängigkeit: Zwei Ereignisse A, B *sind unabhängig, falls* $W(A\cap B) = W(A)\cdot W(B)$ *gilt.* Die Ereignisse $A :=$ { Harry hat k Schirme im Büro } und $B :=${es regnet} können als unabhängig angesehen werden.

f) Haraldine schenkt Harry zu Weihnachten einen weiteren Regenschirm. Sei $\xi_n : \Omega \to \{0,\dots 3\}$ wie oben definiert. Bearbeiten Sie die Aufgabenteile a)–e) in diesem Fall.

Aufgabe 33 Ruin eines Spielers.

Ein Spieler spielt ein faires Glückspiel, bei dem der Einsatz in jeder Spielrunde 1 Euro beträgt. a sei das Startkapital, $\xi_i \in \{-1,1\}$ bezeichne den "Gewinn" bei der $i-$ten Runde. $Z_n = Z_n(a)$ bezeichne das Kapital des Spielers nach n Runden. Der Spieler benötigt ein Kapital von $b > a$ Euro, und er ist nicht kreditwürdig. Daher wird das Spiel beendet, sobald Z_n den Wert 0 oder b erreicht. (Absorbierende Zustände)

a) Geben Sie den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix an.

b) Bestimmen Sie die invarianten Verteilungen. Ist der Satz von Markoff anwendbar?

c) Sei $R = R(a) := \{\exists n \in \mathbb{N} : Z_n = 0\}$, mit $W(R)$ werde die Ruinwahrscheinlichkeit bezeichnet. Zeigen Sie, daß folgende Relation gilt:

$$W(R|Z_m = k) = \tfrac{1}{2}\left(W(R|Z_m = k+1) + W(R|Z_m = k-1)\right)$$

für alle $k \in \{1, \ldots, b-1\}$ (unabhängig von m).
Folgern Sie daraus: $W(R|Z_m = a) = 1 - a/b$.
d) Beschreiben Sie – z.B. für $b = 4$ – das Grenzverhalten der Markoffkette Z_n bei gegebenem Starkapital $a \in \{0, \ldots, b\}$.

Aufgabe 34 Betrachten Sie eine zeitlich homogene Markoffkette auf dem Zustandsraum $\{1, \ldots, N\}$, deren Übergangswahrscheinlichkeit eine Dreibandmatrix ist, wobei die Ränder 1 und N totalreflektierende Zustände sind. Geben Sie den Übergangsgraphen an.
a) In den Zeilen $2 \le i \le N-1$ seien die Koeffizienten $p_{i,i-1}, p_{i,i}, p_{i,i+1} \neq 0$. Ist der Satz von Markoff anwendbar?
b) Bestimmen Sie die invarianten Verteilungen. Betrachten Sie zunächst den Spezialfall $N = 5, p_{i,i-1} = p, p_{i,i} = r, p_{i,i+1} = q,\ p + q + r = 1,\ 1 < i < 5$.
c) Versuchen Sie für das in der Vorlesung skizzierte Diffusionsmodell *(zwei Hunde mit a roten bzw. b schwarzen Flöhen treffen sich regelmäßig)* die invarianten Verteilungen zu bestimmen. (Betrachten Sie insbesondere den Spezialfall $a = b$.)

Aufgabe 35 (X_n) sei eine zeitlich homogene Markoff Kette auf dem Zustandsraum $\{0, \ldots, 4\}$. Die Kette starte in $X_0 = 1$ und habe die Übergangsmatrix

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie den Übergangsgraphen an.
b) Geben Sie die Verteilungen $\vec{p}^{(i)}$ für $0 \le i \le 3$ an.
c) Bestimmen Sie die invarianten Verteilungen. Ist der Satz von Markoff anwendbar?
d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß die Kette den (absorbierenden) Zustand 4 irgendwann erreicht.
e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß die Kette X_n für $0 \le n \le N$ die Friedhöfe 0 und 4 nicht erreicht.

Aufgabe 36 Als Emmanuel Kant und Leonhard Euler noch in Königsberg promenierten hatte die Stadt 7 Brücken (siehe Skizze), die die einzelnen Stadtteile verbanden. (Bekanntlich entwickelte sich an der Diskussion über die möglichen Wege über diese Brücken die Graphentheorie.) Eine Kutsche, die durch die Stadt fährt kann als Markoffkette aufgefaßt werden, deren Zustandsraum die Stadtteile A, B, C, D, E sind. (C und E seien durch keine Brücke, sondern durch eine in beiden Richtungen befahrbare Straße verbunden.) Der Kutscher wählt, wenn er sich in einem Stadtteil befindet, eine der möglichen Verbindungen in einen anderen Stadteil, jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Stellen Sie den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix auf.
a) Was läßt sich über das Langzeitverhalten der Wahrscheinlichkeiten, daß sich

die Kutsche im Stadtteil $A, B, \ldots$ befindet, aussagen?
b) Die Stadtverwaltung beschließt, ein Einbahnsystem einzuführen: Und zwar seien die Wege $A \to B, B \to D, D \to E, E \to A, A \to C, C \to D, B \to C, E \to C$ Einbahnen.
c) Das Verkehrsamt erhält einen neuen Leiter. Der entscheidet, daß die Richtung einer Einbahn geändert wird: $D \to C$ statt $C \to D$.
d) Nach negativen Erfahrungen kehrt man zunächst zurück zum Verkehrsplan b). Dann werden Fußgängerzonen eingerichtet: Die Brücken zwischen B und C sowie B und D werden für Kutschen gesperrt, dagegen wird die Brücke von B nach A in beiden Richtungen für den Verkehr freigegeben.
Geben Sie in b) – d) die Ü-Graphen und die Ü-Matrizen an und bestimmen Sie jeweils das Langzeitverhalten.

Stadtplan (Skizze) Graph (ungerichtet)

Abgabe
in den Kästen im Foyer bis Mittwoch, 7.6.06 16 Uhr

Sprechstunden im SoSe 2006
W. Hazod: *Dienstag, 11–12, Mittwoch, 12–13: M 627*
Tel.: 3055 e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de
P. Becker-Kern: *Dienstag, 10–11: M 625*
Tel.: 3099 email: pbk@mathematik.uni-dortmund.de
K. Kosfeld: *Dienstag, 10–11 : M 630*
Tel.: 5917 e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de
Dominik Langenscheidt: *Mittwoch 12 - 13: M 613*
Tel.: 3432 e-mail: dominik.langenscheidt@uni-dortmund.de

Zusatzübungen Lehramt:
N. Thyssen: *Dienstag, 10–11: M 613*
Tel.: 3432 e-mail: nadine.thyssen@uni-dortmund.de