Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod 5.06.2006

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) SoSe 2006

Blatt 8

Aufgabe 37
a) Beim *dreifachen* Münzwurf bezeichnen A, B, C die folgenden Ereignisse:
A mindestens zwei Wappen, $C := A$, B erster Wurf Kopf.
Zeigen Sie, daß zwar $W(A \cap B \cap C) = W(A) \cdot W(B) \cdot W(C)$ gilt, daß aber die Ereignisse *nicht unabhängig* sind. Sind sie paarweise unabhängig?
b) Beim *zweifachen* Münzwurf bezeichne
A beim ersten Wurf Wappen, B zweiter Wurf Wappen,
C zwei verschiedene Ereignisse, d.h. (Kopf, Wappen) oder (Wappen, Kopf).
Zeigen Sie, daß die Ereignisse *paarweise* unabhängig, aber *nicht* unabhängig sind.

Aufgabe 38 *Schriftlich bearbeiten* Sei (Ω, Σ, W) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $A_1, \dots A_N \in \Sigma$. Die Mengen $\{A_i\}$ besitzen die *Produkt-Eigenschaft* falls gilt

$$W(\bigcap_1^N A_i) = \prod_1^N W(A_i) \qquad (*)$$

a) Zeigen Sie: $A_1, \dots, A_N$ sind unabhängig (bez. W) genau dann wenn $\{B_1, \dots, B_N\}$ (*) erfüllen für alle $B_i \in \Sigma(A_i) := \{\emptyset, \Omega, A_i, \complement A_i\}$.
b) Seien $\mathfrak{E}_i : i \in I$, Mengensysteme in Σ mit $\Omega \in \mathfrak{E}_i$ für alle $i \in I$.
Zeigen Sie: $\{\mathfrak{E}_i : i \in I\}$ sind unabhängig (bez. W) genau dann wenn für jede *endliche* Teilmenge $J = \{i_1 \dots, i_N\} \subseteq I$ und für jede Auswahl $A_{i_1} \in \mathfrak{E}_{i_1}, \dots, A_{i_N} \in \mathfrak{E}_{i_N}$ die Mengen $\{A_{i_j}, j = 1 \dots N\}$ die Eigenschaft (*) besitzen.
c) Seien $\{X_i, i \in I\}$ reelle Zufallsvariable. Zeigen Sie:
Die ZV sind genau dann unabhängig (bez. W), wenn für jede *endliche* Teilmenge $J = \{i_1 \dots, i_N\} \subseteq I$ und für jede Auswahl von Borelmengen $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{B}^1$ die Mengen $\{\{X_{i_j} \in A_j\},\ j = 1 \dots, N\}$ (*) erfüllen.
d) Es gilt das stärkere Kriterium (mit den Bezeichnungen von c)):
Die ZV sind genau dann unabhängig (bez. W), wenn für jede *endliche* Teilmenge $J = \{i_1 \dots, i_N\} \subseteq I$ und für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ gilt:

$$W(X_{i_1} \leq x_1, \dots, X_{i_N} \leq x_N) = \prod_{j=1}^N W(X_{i_j} \leq x_j) \qquad (\star\star)$$

e) Interpretieren Sie die Eigenschaft $(\star\star)$ im Kontext von Verteilungsfunktionen, falls $I = \{1, \dots, N\}$. ($\vec{x} \mapsto F_{X_1, \dots, X_N}(\vec{x}) := W(X_1 \leq x_1, \dots, X_N \leq x_N)$ bezeichne dabei die *Verteilungsfunktion des Zufallsvektors* $\vec{X} := (X_1, \dots, X_N)$ (bzw. der *gemeinsamen Verteilung* der Komponenten).
f) Seien $\Omega, \Lambda \neq \emptyset$, sei $X : \Omega \to \Lambda$ eine Abbildung. $\mathfrak{E} \subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$ sei ein Mengensystem. Weiter seien $\mathfrak{S} := \Sigma(\mathfrak{E})$ die von $\mathfrak{E}$ erzeugte $\sigma-$Algebra und $\mathfrak{A} := \Sigma(X^{-1}(\mathfrak{E}))$. Zeigen Sie:
$X^{-1}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{A}$, m.a.W. $X^{-1}(\Sigma(\mathfrak{E})) = \Sigma(X^{-1}(\mathfrak{E}))$.
⟦ Zeigen Sie zunächst für jede $\sigma-$Algebra $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, daß $\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{P}(\Lambda) : X^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$ eine σ-Algebra in $\mathcal{P}(\Lambda)$ ist. ⟧
g) Wiederholen Sie den Beweis aus der Vorlesung: *Ein durchschnittstabiles Dynkinsystem ist eine $\sigma-$Algebra.*

Aufgabe 39 $\xi : \Omega \to \mathbb{R}_+$ sei eine Zufallsvariable (Lebensdauer) mit Verteilungsfunktion F, Schwanz R und Dichte f, die durch die Hazardrate (Ausfallrate) h resp. die Hazardfunktion H beschrieben sind. $x \mapsto F_t(x) := W(\xi \leq x + t | \xi \geq t),\ t > 0$, bezeichne die Überlebens-Verteilungsfunktionen.
a) Wie muß h bzw. H beschaffen sein, damit $t \mapsto F_t(\cdot)$ (*) monoton wachsend (resp. fallend) ist?

b) Warum muß für die Hazardfunktion gelten $H(t) := \int_0^t h(x)dx \to \infty$?
c) Sei ξ die Lebensdauer eines technischen Geräts mit Ausfallrate h. Wie kann man Monotonie (*) in Teil a) interpretieren? Gibt es Situationen in denen $\uparrow$ oder $\downarrow$ in (*) plausibel ist?
d) $X_i \geq 0$ seien unabhängige Zufallsvariablen, deren Verteilungen durch die Hazardraten h_i gegeben sind, $i = 1, 2$. Sei $Y := \min(X_1, X_2)$. Geben Sie die Hazardrate von Y an. Geben Sie Beispiele X_1, X_2, Y an, bei denen die Hazardraten h_i monoton sind, aber die Hazardrate von Y diese Eigenschaft nicht besitzt.

Aufgabe 40 a) In einer Urne befinden sich weiße, schwarze und rote Kugeln, die Mischungsverhältnisse seien $p, q, r \quad (0 < p, q, r;\ p + q + r = 1)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach n Zügen mit Zurücklegen k_1 weiße, k_2 schwarze und k_3 rote Kugeln gezogen zu haben? $(k_i \in \mathbb{Z}_+,\ k_1 + k_2 + k_3 = n)$
b) Seien $\xi_i, 1 \leq i \leq n$ Zufallsvariable mit Werten in $\{w, s, r\}$, die die Farbe der Kugel beim $i-$ten Zug angeben. Bestimmen Sie die Verteilung von ξ_i. Warum kann man voraussetzen, daß die ξ_i unabhängig sind? Bestimmen Sie die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit mittels der (unabhängigen) Zufallsvariablen ξ_i.
c) Die Mischungsverhältnisse p, q, r seien unbekannt, n sei fest. Es werden bei einem Versuch k_1^* weiße, k_2^* schwarze und k_3^* rote Kugeln gezogen, $\sum k_i^* = n$. Schätzen Sie p, q, r aufgrund dieser Beobachtung mittels der M-L Methode.

Aufgabe 41 *Hardy Weinberg Gesetz.*
a, b seien Allele eines bestimmten Gens. Die Genotypen aa, ab, bb treten mit folgenden Wahrscheinlichkeiten auf:

$$W_\theta(aa) = \theta^2, \quad W_\theta(ab) = 2 \cdot \theta \cdot (1 - \theta)\,, \quad W_\theta(bb) = (1 - \theta)^2 \qquad (*)$$

mit unbekanntem $0 \leq \theta \leq 1$. Bei einer unabhängigen Stichprobe vom Umfang N wurden aa, ab und bb mit den Häufigkeiten n_1, n_2, n_3 beobachtet, $n_1 + n_2 + n_3 = N$.
a) Geben Sie die Likelihoodfunktion und die log-Likelihoodfunktion an.
b) Schätzen Sie den Parameter θ mit der Maximum-Likelihood Methode.
$\llbracket$ Um welchen Verteilungstyp handelt es sich in (*) ? $\rrbracket$

Abgabe in den Kästen im Foyer bis Mittwoch, 14.6.06 16 Uhr

Sprechstunden im SoSe 2006
W. Hazod: *Dienstag, 11–12, Mittwoch, 12–13: M 627*
Tel.: 3055 e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de
P. Becker-Kern: *Dienstag, 10–11: M 625*
Tel.: 3099 email: pbk@mathematik.uni-dortmund.de
K. Kosfeld: *Dienstag, 10–11 : M 630*
Tel.: 5917 e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de
Dominik Langenscheidt: *Mittwoch 12 - 13: M 613*
Tel.: 3432 e-mail: dominik.langenscheidt@uni-dortmund.de
Zusatzübungen Lehramt:
N. Thyssen: *Dienstag, 10–11: M 613*
Tel.: 3432 e-mail: nadine.thyssen@uni-dortmund.de