Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

23.06.2006

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) SoSe 2006

Blatt 10

Aufgabe 47 **a)** Seien $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktionen $F_{X_i} =: F_i$ und Schwänzen $R_{X_i} =: R_i$, $1 \leq i \leq N$. Die Verteilungen besitzen Dichten f_i. Zeigen Sie: Die Verteilung der ZV $Y := \min_{1 \leq i \leq N} X_i$ besitzt eine Dichte, die durch

$g := \prod_1^N R_i \cdot \sum_1^N \frac{f_i}{R_i}$ gegeben ist.

b) Betrachten Sie den Spezialfall exponentialverteilter ZV mit

$F_i(x) := (1 - \exp(-\alpha_i \cdot x)) \cdot 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ (wobei $\alpha_i > 0$).

c) Ein Projekt besteht aus 5 Teilprojekten $P_1, \ldots P_5$, die von verschiedenen voneinander unabhängigen Arbeitsgruppen durchgeführt werden. Die Arbeit an den Teilprojekten P_2 bzw. P_5 kann erst begonnen werden, wenn P_1 bzw. P_4 beendet sind. Die Bearbeitungsdauer T_i des Projektes P_i sei auf $[0, t_i]$ gleichverteilt. Geben Sie die Verteilungsfunktion der Dauer des Gesamtprojekts an. (Es genügt, eine Formel abzuleiten).

$\llbracket$ Fertigen Sie eine Skizze des Arbeitsplans an! Bestimmen Sie zunächst die Dauer der Teilprojekte $\{P_1, P_2\}$ und $\{P_4, P_5\}$ $\rrbracket$

Aufgabe 48 *Schriftlich bearbeiten* **a)** Zeigen Sie: Für die Verteilungsfunktion $B_{n,p}$ einer Binomialverteilung $\beta(n, p)$ gilt:

$1 - B_{n,p}(k-1) = \sum_{j=k}^{n} \beta(n,p)(j) = k \cdot \binom{n}{k} \int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k} dt$

(Das Integral ist als *unvollständige Beta-Funktion* bekannt).

$\llbracket$ Differenzieren Sie die linke Seite nach $p, 0 < p < 1$ $\rrbracket$

b) *Ordnungsstatistiken* Sei $\vec{x} = (x_1, ...x_n)$ ein Vektor in $\mathbb{R}^n$. Durch Permutation der Indices erhält man ein geordnetes Tupel. Dessen Komponenten werden mit $(x_{1:n}, \ldots x_{k:n}, \ldots x_{n:n})$ bezeichnet. Verifizieren Sie zunächst für $r \in \mathbb{R}$:

$\{\vec{x} : x_{k:n} \leq r\} = \left\{\vec{x} : \sum_1^n 1_{(-\infty,r]}(x_i) \geq k\right\}$

c) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige reelle ZV mit Verteilung $X_i(W) =: \mu$. Die Verteilungsfunktion sei mit $F = F_\mu$ bezeichnet. Dann sind für festes $r \in \mathbb{R}$ die Zufallsvariablen $\left\{Y_i := 1_{(-\infty,r]}(X_i), 1 \leq i \leq n\right\}$ unabhängig und verteilt nach einer Binomialverteilung $\beta(1, F(r))$.

Bestimmen Sie die Verteilung von $Z := \sum_1^n Y_i$.

d) Folgern Sie daraus: $X_{k:n}$ hat die Verteilungsfunktion

$F_{k:n} : r \mapsto W(X_{k:n} \leq r) = k \cdot \binom{n}{k} \int_0^{F(r)} t^{k-1}(1-t)^{n-k} dt$

$\llbracket$ Beachten Sie a) $\rrbracket$

e) Zeigen Sie, daß daraus folgt: Falls μ eine Dichte f besitzt, so besitzt $X_{k:n}(W)$ die Dichte

$f_{k:n} : x \mapsto k \cdot \binom{n}{k} f(x) \cdot F(x)^{k-1}(1 - F(x))^{n-k}$.

Aufgabe 49 ξ sei eine nicht negative Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und Schwanz $R = 1 - F$. Es sei $\mathbb{E}(\xi) < \infty$.
a) ξ sei $\mathbb{Z}_+$-wertig. Dann gelten:
a1) $k \cdot R(k) \to 0$ für $k \to \infty$
a2) $\mathbb{E}(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} R(k)$
b) Die Verteilung von ξ besitze eine Dichte f. Dann gelten:
b1) $x \cdot R(x) \to 0$ für $x \to \infty$
b2) $\mathbb{E}(\xi) = \int\limits_0^{\infty} R(x)dx$
$\llbracket$ Umordnen in a2), Satz von Fubini in b2) $\rrbracket$

Aufgabe 50 *Vgl. Blatt 4, 1. Aufgabe* Bei der Herstellung von Fußbällen ist der Radius $\mathcal{R}$ produktionsbedingt zufälligen Schwankungen unterworfen, und zwar ist $\mathcal{R}$ in einem Intervall $[R_0 - \epsilon, R_0 + \epsilon]$ gleichverteilt. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz
a) des Radius $\mathcal{R}$, **b)** der Oberfläche $\mathcal{O}$ und **c)** des Volumens $\mathcal{V}$.
$\llbracket$ Formeln für Oberfläche und Volumen: $O(r) = 4r^2\pi$, $V(r) = \frac{4r^3\pi}{3}$ $\rrbracket$
d) Der "Hausverstand" könnte zu dem Ansatz $\mathbb{E}(\mathcal{V}) = \frac{4(\mathbb{E}(\mathcal{R}))^3 \cdot \pi}{3}$ führen. Ist dies sinnvoll?

Aufgabe 51 **A)** Bestimmen Sie den Erwartungswert folgender Verteilungen (vgl. Blatt 4):
a) Gleichverteilung **b)** Geometrische Verteilung. **c)** Dreieckverteilung **d)** Weibullverteilung **e)** Betaverteilung **f)** Paretoverteilung **g)** Potenz-Verteilung **h)** Maxwellverteilung
i) Laplaceverteilung (mit Dichte $x \mapsto \frac{\lambda}{2} \cdot \exp(-\lambda \cdot |x|)$)
$\llbracket$ Zum Teil läßt sich Aufgabe 49) benutzen. Es wäre sinnvoll, sich die Definition der Γ-Funktion in Erinnerung zu rufen! $\rrbracket$

B) Sei $\vec{X} := (X_1, X_2)$ ein zufälliger Vektor mit Werten in $\mathbb{Z}^2$ mit diskreter (gemeinsamer) Verteilung $\sum_{i,j\in\mathbb{Z}^2} p(i,j) \cdot \epsilon_{i,j}$. Dabei sind die Werte $p(i,j);\ 1 \le i \le 3, 1 \le j \le 4$ der folgenden Tabelle zu entnehmen: $\begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}$. (Alle übrigen $p(i,j) = 0$.)
Bestimmen Sie
a) die Verteilungen von X_1 und X_2,
b) deren Erwartungswerte und Varianzen
c) die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ und
d) den Korrelationskoeffizienten $\rho(X_1, X_2)$

Abgabe in den Kästen im Foyer bis Freitag, 30.6.06 14. Uhr

Sprechstunden im SoSe 2006
W. Hazod: *Dienstag, 11–12, Mittwoch, 12–13: M 627*
Tel.: 3055 e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de
P. Becker-Kern: *Dienstag, 10–11: M 625*
Tel.: 3099 email: pbk@mathematik.uni-dortmund.de
K. Kosfeld: *Dienstag, 10–11 : M 630*
Tel.: 5917 e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de
Dominik Langenscheidt: *Mittwoch 12 - 13: M 613*
Tel.: 3432 e-mail: dominik.langenscheidt@uni-dortmund.de
Zusatzübungen Lehramt:
N. Thyssen: *Dienstag, 10–11: M 613*
Tel.: 3432 e-mail: nadine.thyssen@uni-dortmund.de