Universität Dortmund 23.06.2006
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) SoSe 2006

Blatt 11

Aufgabe 51 **a)** Wiederholen Sie den Beweis der Vorlesung: Seien ξ und η beide 0-1-wertige Zufallsvariable. Dann gilt: $(\xi,\ \eta)$ sind *unkorreliert*, genau dann, wenn sie *unabhängig* sind.
b) Seien $A, B, C \in \Sigma$, mit $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ und $0 < W(A), W(B) = W(C)$.
Dann sind $(\xi := 1_A,\ \eta := 1_B - 1_C)$ *unkorreliert*, aber *nicht unabhängig*.
c) Der Zufallsvektor $\vec{X} := (\xi_1, \xi_2)$ besitze eine Standard Normalverteilung $N_{0,I}$. Dann sind $(\xi_1,\ \xi_2)$ unabhängig. Es sei $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}, d)$ und $\vec{Y} = (\eta_1, \eta_2) := A\vec{X} = (\alpha\xi_1 + \beta\xi_2,\ \gamma\xi_1 + \delta\xi_2)$. Bestimmen Sie die Kovarianzmatrix $\mathrm{Cov}(\vec{Y}) = (\mathbb{E}(\eta_i \cdot \eta_j))_{1 \le i,j \le 2}$.
Zeigen Sie: Die Gaußschen ZV $(\eta_1,\ \eta_2)$ sind *unkorreliert* genau dann, wenn sie *unabhängig* sind.

Aufgabe 52 Die Dauer eines Telefongesprächs bei der Telefongesellschaft XY kann als $E_\alpha-$verteilte Zufallsvariable aufgefaßt werden. $x \mapsto K(x)$ sei die Kostenfunktion

$$K(x) := a \cdot 1_{(0,T_0]}(x) + (a + b(x - T_0)) \cdot 1_{(T_0,T_1]}(x) + (a + b(T_1 - T_0) + c(x - T_1)) \cdot 1_{(T_1,\infty)}(x)$$

(Die Kosten setzen sich zusammen aus einem Sockelbetrag der Höhe a, steigen linear mit Steigung b zwischen T_0 und T_1 und steigen (langsamer) mit Steigung $c(< b)$ ab T_1).
Berechnen Sie die mittleren Kosten eines Telefongesprächs.
Es wird ein neuer Quasseltarif eingeführt: Mit neuer Kostenfunktion $K_{\mathrm{neu}}(x) := K(x)$ für $x \le T_1$, und $:= K(T_1)$ für $x \ge T_1$. Berechnen Sie die mittleren Kosten für den neuen Tarif.

Aufgabe 53 Seien $\xi_i, i \ge 1$, unabhängige N_{a,σ^2}-verteilte Zufallsvariable. Mit S_n werde die Partialsumme $\sum_1^n \xi_i$ bezeichnet. Versuchen Sie, eine möglichst gute Abschätzung der (beidseitigen) Schwänze $W(|\frac{1}{n}S_n - a| > \epsilon)$ anzugeben. (Besser als die Ungleichungen die in der Vorlesung bewiesen wurden).
a) Dazu beachte man (1), daß S_n nach einer Normalverteilung verteilt ist (Geben Sie die Parameter an)
(2), daß eine Normalverteilung ein affines Bild einer Standardnormalverteilung ist. Man kann das Problem also auf $N_{0,1}$ zurückführen.
b) Für eine $N_{0,1}$-verteilte Zufallsvariable X zeige man für $\eta > 0$ die folgenden Abschätzungen (für die rechten Schwänze):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\eta}{1+\eta^2} \cdot \exp(-\eta^2/2) < W(\{X > \eta\}) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \exp(-\eta^2/2) \qquad (\eta > 0)$$

$\llbracket$ Für die rechte Ungleichung beachte man, daß $\int_\eta^\infty \exp(-x^2/2)\,dx < \frac{1}{\eta}\int_\eta^\infty x\exp(-x^2/2)\,dx$, die linke Ungleichung folgt ähnlich durch partielle Integration von $\int_\eta^\infty x^2 \cdot \exp(-x^2/2)\,dx$ $\rrbracket$

Aufgabe 54 **(Elemente der Stichprobentheorie)** Es seien $\xi_0,\ \xi_i, 1 \le i \le n$, unabhängige reelle Zufallsvariable ("Stichproben") mit Verteilung $\xi_i(W) = \mu$, mit Erwartungswert $\mathbb{E}(\xi_i) = a$ und Varianz $\mathbb{V}(\xi_i) = \sigma^2 > 0$. Es existiere eine weitere Folge reeller Zufallsvariabler $\eta_0,\ \eta_i$ mit Verteilung ν, mit Verteilungsfunktion F, Erwartungswert $\mathbb{E}(\eta_i) = b$ und Varianz $\mathbb{V}(\eta_i) = \rho^2 > 0$. Dabei wird zusätzlich vorausgesetzt, daß die gemeinsame Verteilung von (ξ_i, η_i) gleich der Verteilung von (ξ_0, η_0) ist (für alle i) und daß die $\mathbb{R}^2$-wertigen Variablen $((\xi_i, \eta_i), 1 \le i \le n)$ unabhängig sind. Man definiert:
- $\overline{X}^{(n)} := \frac{1}{n} \cdot S_n$ (empirischer) **Mittelwert oder Stichprobenmittel**,

wobei $S_n := \sum_1^n \xi_i$ gesetzt wird. Analog sei der Mittelwert $\overline{Y}^{(n)}$ der Stichprobe (η_i) definiert.
- $\overline{V}^{(n)} := \frac{1}{n-1} \cdot T_n$ heißt die (empirische) **mittlere quadratische Abweichung**,

wobei $T_n := \sum_1^n \left(\xi_i - \overline{X}^{(n)}\right)^2$ gesetzt wird, und entsprechend sei die mittlere quadratische Abweichung der Stichprobe $(\eta_i, i \geq 0)$ definiert.
Die (empirischen) **Kovarianzen** der Stichproben $(\xi_i,\ \eta_i), i \geq 0$, definiert man als

- $\overline{C}^{(n)} := \frac{1}{n-1} \cdot R_n$,

wobei $R_n := \sum_1^n \left(\xi_i - \overline{X}^{(n)}\right) \cdot \left(\eta_i - \overline{Y}^{(n)}\right)$ gesetzt wird.
Die **empirische Verteilungsfunktion** der Stichprobe $(\xi_i)_{i=1}^n$ vom Umfang n sei definiert als die Zufallsvariable

- $F_n^{(\omega)}(x) : \Omega \ni \omega \mapsto F_n^{(\omega)}(x) := \frac{1}{n} \sum\limits_1^n 1_{(-\infty,x]} \circ \xi_k(\omega) = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{card}\{k \leq n : \xi_k(\omega) \leq x\}$ $\qquad (x \in \mathbb{R}$

Zeigen Sie, daß die Zufallsvariablen $\overline{X}^{(n)}, \overline{V}^{(n)}, \overline{C}^{(n)}$ und $F_n^{(\cdot)}(x),\ x \in \mathbb{R}$, *erwartungstreue Schätzer* für Erwartungswert, Varianz, Kovarianz und Verteilungsfunktion sind: Zeigen Sie:
a) $\mathbb{E}(\overline{X}^{(n)}) = a = \mathbb{E}(\xi_0)$, **a1)** geben Sie $\mathbb{V}(\overline{X}^{(n)})$ an,
b) $\mathbb{E}(\overline{V}^{(n)}) = \sigma^2 = \mathbb{V}(\xi_0)$,
c) zeigen Sie : $\mathbb{E}(\overline{C}^{(n)}) = C(\xi_0, \eta_0)$
$\left[\!\left[\ \overline{V}^{(n)} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_i \xi_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i,j} \xi_i\xi_j\right) \quad \text{und} \quad \overline{C}^{(n)} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_i \xi_i\eta_i - \frac{1}{n}\sum_{i,j}\xi_i\eta_j\right)\ \right]\!\right]$
d) $\mathbb{E}\left(\omega \mapsto F_n^{(\omega)}(x)\right) = F(x),\ x \in \mathbb{R}$
e) Zeigen Sie überdies: $\overline{X}^{(n)} \to a = \mathbb{E}(\xi_0)$ (stochastische Konvergenz). Geben Sie eine Abschätzung für die Konvergenzgeschwindigkeit an.
f) Zeigen Sie: Für jedes x konvergieren $F_n^{(\omega)}(x) \to F(x)$ stochastisch.
$\left[\!\left[\right.\right.$ Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ ist die Zufallsvariable $\omega \mapsto F_n^{(\omega)}(x)$ $\beta(n,p)$-verteilt mit $p = F(x)$. $\left.\left.\right]\!\right]$
g) Mit den obigen Bezeichnungen sei für festes $\omega \in \Omega$ und zugehörigen Stichprobenwerten $\{x_i := \xi_i(\omega), y_i := \eta_i(\omega)\}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $W^{(\omega)}$ auf $\mathbb{R}^2$ – die **empirische Verteilung** – definiert durch $W^{(\omega)} := \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_1^n \varepsilon_{(x_i,y_i)}$. Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, W^{(\omega)}\right)$.
$\mathbb{E}^{(\omega)}$ bezeichne den Erwartungswert bezüglich $W^{(\omega)}$, analog seien die Varianz $\mathbb{V}^{(\omega)}$ und Kovarianz $C^{(\omega)}$ definiert. Geben Sie auf R^2 definierte reelle Zufallsvariablen (ξ, η) an, für die gelten:
$\mathbb{E}^{(\omega)}(\xi) = \overline{X}^{(n)}$, $\mathbb{E}^{(\omega)}(\eta) = \overline{Y}^{(n)}$ und $W^{(\omega)}(\xi \leq z) = F_n^{(\omega)}(z)$, $z \in \mathbb{R}$. $\left[\!\left[\right.\right.$ Randverteilungen von $W^{(\omega)}$! $\left.\left.\right]\!\right]$
Bestimmen Sie auch $\mathbb{V}^{(\omega)}(\xi)$ und $C^{(\omega)}(\xi, \eta)$

Aufgabe 55 *(Schriftlich bearbeiten)* Das Weimarer Würfelmännchen ist ein Würfel in der Form einer hockenden menschlichen Figur mit den Augen $1, \ldots, 6$. (Es ist nicht bekannt, ob er von J.W. Goethe benutzt wurde.)
a) Nach 150 Würfen (mit einem Replikat) beobachtet man folgendes Ergebnis:

4	3	5	3	5	2	4	6	3	2	3	6	5	4	3	3	4	2	5	5	3	4	5	5	5	2	2	6	5	5
5	4	2	4	4	2	5	3	3	3	2	4	4	4	3	4	2	2	4	4	4	3	5	1	2	5	2	3	2	2
5	2	5	1	4	5	2	6	3	1	1	5	2	3	5	5	3	1	3	3	6	4	3	3	5	5	5	5	2	5
4	5	3	2	2	4	2	6	3	2	2	2	5	3	3	3	2	3	4	6	5	4	1	5	6	2	5	4	3	2
5	6	5	4	6	4	3	2	3	6	5	6	5	2	3	5	5	2	1	3	4	5	2	3	3	4	3	5	3	6

Ist der Würfel annähernd ideal?
Geben Sie Schätzungen an für $p_i := W(\text{Augenzahl} = i)$ für $1 \leq i \leq 6$.
Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion der Augenzahl an.
Geben Sie Schätzungen für den Median und die Quartile der Augenzahl an.
b) Bei einem weiteren Versuch wurden nach 1500 Würfen folgende Ergebnisse erzielt:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl	68	332	341	257	361	131

Wie lautet nun die Antwort auf die Frage, ob der Würfel ideal ist?

Abgabe in den Kästen im Foyer bis Donnerstag, 6.7.06 14. Uhr

Sprechstunden im SoSe 2006

W. Hazod: *Dienstag, 11–12, Mittwoch, 12–13: M 627*
Tel.: 3055 e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de
P. Becker-Kern: *Dienstag, 10–11: M 625*
Tel.: 3099 email: pbk@mathematik.uni-dortmund.de
K. Kosfeld: *Dienstag, 10–11 : M 630*
Tel.: 5917 e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de
Dominik Langenscheidt: *Mittwoch 12 - 13: M 613*
Tel.: 3432 e-mail: dominik.langenscheidt@uni-dortmund.de

Zusatzübungen Lehramt:

N. Thyssen: *Dienstag, 10–11: M 613*
Tel.: 3432 e-mail: nadine.thyssen@uni-dortmund.de