Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

8.07.2006

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) SoSe 2006

Blatt 12 (Ferienblatt) Grenzwertsätze

Aufgabe 56 a) Sei $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2},\ 0 \leq x \leq 1$. Bekanntlich ist $\int\limits_0^1 f dx = \frac{\pi}{4}$. Dies soll mit der Monte Carlo Methode verifiziert werden. $\xi_i, 1 \leq i \leq N$, sei eine Folge unabhängiger in [0,1] gleichverteilter Zufallsvariabler. Wie groß muß N gewählt werden, damit
$|\frac{\pi}{4} - \frac{1}{N}\sum\limits_1^N \sqrt{1-\xi_i^2(\cdot)}| < 0,01$ mit Wahrscheinlichkeit $> 0,95$ gilt?
b) *(Qualitätskontrolle)* Die Tagesproduktion einer Maschine enthält in der Regel 5% Ausschuß. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Produktion von 1000 Stück 40 – 100 Ausschußstücke gefunden werden. (Zuerst exakt, dann mittels des ZGWS bestimmen).
c) *(Wahlmanipulation)* 2 Parteien stehen zur Wahl. Die N wahlberechtigten Bürger sind unentschlossen, d.h., sie werden ihre Stimme unabhängig mit Wahrscheinlichkeit 1/2 für eine der beiden Parteien abgeben. Da entschließt man sich in den Führungsgremien der Partei A zu einem Trick: Es wird den n Bürgern eines Nachbarlands das Wahlrecht eingeräumt (in der Annahme, daß diese "Neubürger" aus Dankbarkeit ihre Stimme für A abgeben.)
Sei $\alpha \in (0,1)$. Wie groß muß – in Abhängigkeit von α und $N-$ die Einwohnerzahl n des Nachbarlandes sein, damit A die Wahl mit Wahrscheinlichkeit $> 1-\alpha$ gewinnt?
Sei z.B. $N = 49\ 000\ 000$. Bestimmen Sie n für $\alpha = 0,001, = 0,01$ oder $= 0,1$. Reicht ein Land der Größe von Liechtenstein (24 000 EW) oder Luxemburg (360 000 EW) oder sollte man eher an Österreich denken?
$\big[\!\big[$ ZGWS mit Fehlerabschätzung anwenden! $\big]\!\big]$
d) Bei einem Glückspiel kann mit Wahrscheinlichkeit p gewonnen, mit Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$ verloren werden. Ein Spieler betritt das Kasino mit einem Startkapital $a\ (> 0)$, der Einsatz beträgt bei jeder Spielrunde 1 Euro. $\xi_i \in \{-1,+1\}$ gibt den Gewinn bzw. Verlust bei der i-ten Runde an. Sei $K_N = a + \sum_1^N \xi_i$ das Kapital des Spielers nach N Runden.
Geben Sie obere und untere Schranken für K_N an (mittels GdgZ und ZGWS). Betrachten Sie insbesondere den Fall eines fairen Spiels $p = q = \frac{1}{2}$

Aufgabe 57 Verifizieren Sie die Beweisskizze der Vorlesung:
a) Sei $\lambda > 0$ und sei X eine $\pi_\lambda-$ verteilte Zufallsvariable. Seien für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1,\dots,n\}$ $\{X_i^{(n)}, 1 \leq i \leq n\}$ unabhängige Zufallsvariable mit der Verteilung $X_i^{(n)}(W) = \pi_{\lambda/n}$. Dann gilt
(1) $X = \sum_{i=1}^n X_i^{(n)}$ in Verteilung, (2) $\mathbb{E}X_i^{(n)} = \frac{\lambda}{n} = V(X_i^{(n)})$.
Weiter gilt nach dem Zentralen Grenzwertsatz für alle $x \in \mathbb{R}$:
(3) $W\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^n \frac{\left(X_i^{(n)}-\lambda/n\right)}{\sqrt{\lambda/n}} \leq x\right) \approx \Phi(x)$.
Wegen (1) ergibt die Aussage (3) wenig Sinn. Warum?
b) Beweisen Sie die (korrekte) Approximation der Poissonverteilung durch die Normalverteilung:
Sei X^λ eine $\pi_\lambda-$verteilte Zufallsvariable. Dann gilt für $Y^\lambda := \left(X^\lambda - \lambda\right)/\sqrt{\lambda}$ mit $\lambda \to \infty$:
$W(Y^\lambda < x) \to \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
Oder beweisen Sie die folgende Form: Seien $X^{(k)}$ unabhängige $\pi_\lambda-$verteilte Zufallsvariable. Dann gilt für $S_n := \sum_1^n X^{(k)}$:
$W\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(S_n - n\cdot\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \leq x\right) \to \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 58 Diskutieren Sie die im beiliegenden Blatt gestellte Frage, ob Ein- und Zwei- Euro Münzen *faire* Münzen sind.