UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 2

Abgabe 31.10.06, 18 Uhr

1. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gelten die Ungleichungen:
(i) $2^n > n^2$
(ii) $3^{2^n} < 2^{3^n}$?

2. Man finde den Fehler in der folgenden Argumentation:
Behauptung A: Alle Autos haben dieselbe Farbe.
Dies folgt sofort aus:
Behauptung B: Sei M eine endliche Menge von Autos. Dann haben alle Elemente von M dieselbe Farbe.
Beweis von Behauptung B durch Induktion nach der Anzahl der Elemente von M.
Behauptung B ist offensichtlich wahr für Mengen mit einem Element.
Behauptung B sei wahr für Mengen von n Autos. M sei eine Menge von $n+1$ Autos, die wir durchnummerieren: $M = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$. Die Mengen $M_1 = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $M_2 = \{a_2, \dots, a_{n+1}\}$ haben n Elemente, und, aufgrund der Induktionsvoraussetzung, alle Autos in ihnen dieselbe Farbe. Der Schnitt ist nicht leer, und daher haben alle Autos dieselbe Farbe.

3. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung und es seien $A, A' \subseteq M$ und $B, B' \subseteq N$. Man zeige:
$f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$, $\quad f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$,
$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$, $\quad f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

4. Man finde eine Funktion
(i) $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ die injektiv aber nicht monoton
(ii) $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ die monoton wachsend aber nicht injektiv
(iii) $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ die surjektiv
ist.

5. Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkte bzw. monoton wachsende Funktionen. Sind dann auch die Funktionen $f+g$, $f \cdot g$ und $f \circ g$ beschränkt bzw. monoton wachsend?