UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 3

Abgabe 6.11.06, 18 Uhr

1. Für Mengen A, M, N und Abbildungen $f : A \to M,\ g : A \to N$ wird $h : A \to M \times N$ durch $h(x) := (f(x), g(x))$ für $x \in A$ definiert. Man beweise oder widerlege durch Gegenbeispiele die folgenden Aussagen:

f, g injektiv $\Rightarrow h$ injektiv	h injektiv $\Rightarrow f, g$ injektiv
f, g surjektiv $\Rightarrow h$ surjektiv	h surjektiv $\Rightarrow f, g$ surjektiv

2. Man zeige, dass für Abbildungen $f : M \to M$ im Fall *endlicher* Mengen M Injektivität und Surjektivität äquivalent sind.

3. (i) Seien $2\mathbb{Z}$ bzw. $3\mathbb{Z}$ die geraden bzw. die durch drei teilbaren ganzen Zahlen. Man gebe eine bijektive Abbildung $f : 2\mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ an.
(ii) Man gebe eine bijektive Abbildung von Intervall $(-1, 1)$ in das Intervall $(5, 10)$ an.

4. Für $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ zeige man, dass die Folgen $\left(\frac{h_n}{n}\right)$ und $\left(\frac{h_n^2}{n}\right)$ beschränkt sind.

5. (i) Man zeige für $n \in N$ die Ungleichungen:

$$1 - \frac{1}{n} \le \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \le 1 \le \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \le 1 + \frac{2}{n}.$$

(ii) Man zeige die folgende Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung: Sind $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ mit $-1 \le x_k \le 0$ für alle k oder $x_k \ge 0$ für alle k, so gilt:

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \ge 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$