UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 5

Abgabe 21.11.06, 18 Uhr

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a_0 = a, a_1 = b$ und rekursiv $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_n)$ für $n \geq 1$. Man zeige, dass (a_n) konvergiert und bestimme den Limes.
Hinweis: Man betrachte zuerst die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$.

2. Für eine Folge (a_n) gelte die Bedingung:

$$\exists C > 0,\, \ell \in \mathbb{N}\ \forall n \geq \ell :\ |a_{n+1} - a_n| \leq C \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Man zeige, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist, und somit auch konvergent.

3. Man zeige dass, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist, so konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

4. Man untersuche die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. die Grenzwerte:
(i) $a_n = \sqrt{n^4 + an^3 + bn^2 + cn} - n^2$ für $a, b, c \geq 0$.
(ii) $a_n = \dfrac{[4n]}{n}$.

5. Man berechne die Grenzwerte:
(i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2}$.
(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + 1/x^2}{1 + 1/x^4}$.