UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 7

Abgabe 5.12.06, 18 Uhr

1. Man entscheide, ob folgende Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt sind und bestimme ggf. $\sup M$ und $\inf M$. Weiter entscheide man, ob M ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

a) $M = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 10\}$, b) $M = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 < 27\}$,
c) $M = \{1 + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, d) $M = \{1 - \frac{1}{n} + 1/2^m \,|\, n, m \in \mathbb{N}\}$.

2. a) Man definiere $M + N := \{x + y \in \mathbb{R} \,|\, x \in M,\, y \in N\}$ für Mengen $M, N \subseteq \mathbb{R}$. Für beschränkte Mengen M, N zeige man: $\sup(M+N) = \sup M + \sup N$ und $\inf(M+N) = \inf M + \inf N$.
b) Die Funktionen $f, g : M \to \mathbb{R}$ seien nach oben beschränkt. Man zeige, dass auch $f + g$ nach oben beschränkt ist und dass $\sup(f + g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M)$ gilt. Man gebe ein Beispiel an, bei dem '$<$' auftritt.

3. a) Es sei $P(x) = x^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k$ ein normiertes Polynom vom Grad m, und es gelte $P(x_0) = 0$. Man zeige: $|x_0| \leq \max\{1, |a_0| + \ldots | + a_{m-1}|\}$.
b) Man berechne eine Nullstelle des Polynoms $P(x) = x^5 + x + 1$ bis auf einem Fehler $< 10^{-3}$.

4. Sei

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Man zeige: f ist stetig.

5. Man berechne die Limiten: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{1/x}$ und $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$.