UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 8

Abgabe 12.12.06, 18 Uhr

1. Man gebe Bedingungen an a, b, c und d an, unter denen die folgenden Formeln definiert sind und beweise die Formeln:

$$\log(a^b) = b \log a, \quad a^{bc} = (a^b)^c, \quad a^b d^b = (ad)^b.$$

2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \text{ für } x, y \in \mathbb{R}, \quad f(0) > 0.$$

Man zeige: $f(1) =: a > 0$ und $f(x) = a^x$ für $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Man betrachte nacheinander $x \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$.

3. (i) Man bestimme die Gipfelstellen der Folge $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.
(ii) Es sei $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge mit unendlich vielen Gipfelstellen $n_1 < \cdots < n_j < n_{j+1} < \ldots$. Man zeige $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = \limsup a_n$.

4. (i) Für die Folge $a_n = \frac{n + (-1)^n(2n+1)}{n}$ berechne man $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$.
(ii) Für beschränkte Folgen $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ zeige man

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n.$$

Man gebe ein Beispiel an, wo tatsächlich "$<$" auftritt.

5. Man untersuche, ob die folgenden Funktionen auf den angegebenen Intervallen nach oben, bzw. nach unten beschränkt sind. Ist dies der Fall, so untersuche man, ob sie ein Maximum bzw. Minimum besitzen:

a) $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ auf $\mathbb{R}$.

b) $g : x \mapsto \frac{W(x)}{1+x^2}$ auf $[0, \infty)$.

c) $h : x \mapsto x^n e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}_0$, auf $[0, \infty)$.

d) ein Polynom $P \in \mathbb{R}_{2m}[x]$ ein Polynom geraden Grades auf $\mathbb{R}$.