UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 9

Abgabe 19.12.06, 18 Uhr

1. Man untersuche folgende Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:
a) $x \mapsto x\sqrt{x}$ auf $[0,\infty)$, b) $x \mapsto x + \sqrt[3]{x^2}$ auf $[0,\infty)$, c) $x \mapsto e^x$ auf $(-\infty,0]$,
d) $x \mapsto e^x$ auf $[0,\infty)$, e) $x \mapsto \log x$ auf $(0,1)$, f) $x \mapsto \log x$ auf $[1,\infty)$.

2. Es sei $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit $h(0) = 0$. Weiter seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit:

$$\forall x, y, \in I \quad : \quad |f(x) - f(y)| \le h(|x-y|).$$

Man zeige, dass f auf I gleichmäßig stetig ist.

3. Sei

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} |x| \ge 1/n \\ 1 - n|x| & \text{für} |x| < 1/n \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$.
a) Man zeige, dass die Funktionen f_n stetig sind, durch Verifikation der Definition.
b) Man bestimme den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge (f_n).
c) Man untersuche die Folge (f_n) auf gleichmäßiger Konvergenz.

4. Gegeben seien vier Funktionenfolgen (f_n):

$$\begin{array}{llll} 1) & \left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right) \text{ auf } \mathbb{R}, & 2) & \left(\frac{n(x-x^2)-1}{nx+1}\right) \text{ auf } [0,1], \\ 3) & (nx(1-x^2)^n) \text{ auf } [-1,1], & 4) & (\exp(-nx^2)) \text{ auf } [-1,1]. \end{array}$$

a) Man untersuche diese auf punktweise Konvergenz und bestimme ggf. die Grenzfunktionen f.
b) Man versuche, jeweils $\|f_n\|$ und $\|f - f_n\|$ zu berechnen und entscheide, ob gleichmäßige Konvergenz vorliegt.