UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 11

Abgabe 16.01.07, 18 Uhr

1. Man untersuche die folgenden Funktionen auf ihren Definitionsbereichen auf Differenzierbarkeit und berechne ggf. ihre Ableitung:

a) $f(x) = (1+x^3)e^x$, b) $f(x) = \begin{cases} 1-e^{-\alpha x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0),$

c) $f(x) = x^x,\ x > 0$, d) $f(x) = \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-p},\ x > 0,\ (p > 0).$

2. Für eine Funktion $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ gelte $|f(x)| \leq c|x|^\gamma$ für ein $\gamma > 1$ und $c > 0$. Man zeige, dass f in 0 differenzierbar ist und man bestimme die Ableitung.

3. Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $f \in C^4(I)$, $f(I) \subset J$, $g \in C^4(J)$ und $h = g \circ f$. Man drücke h'', h''' und $h^{(4)}$ durch die Ableitungen von f und g aus.

4. (i) Es sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ existieren. Man zeige: $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

(ii) Es sei $f \in C^2[a,b]$ mit $f(a) = 0$, $f(b) = -1$ und $f'(a) = f'(b) = 0$. Man zeige: $\|f''\| \geq \dfrac{2}{b^2-a^2}$.

5. Man berechne folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \log(1+x)}$,

b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{a}{1-x^a} - \dfrac{b}{1-x^b}\right),\ a, b \neq 0$.