UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 12

Abgabe 23.01.07, 18 Uhr

1. Für die Funktionen $f: \, x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{x}{1+t^2} dt$ und $g: \, x \mapsto \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{x}{1+t^2} dt$ berechne man die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$.

2. Für $a \in \mathbb{R}, \; h > 0, \; c := a + h$ und $b := a + 2h$ berechne man:

a) $\displaystyle\int_a^b (x-a)(x-b)dx$, b) $\displaystyle\int_a^b (x-a)(x-c)dx$, c) $\displaystyle\int_a^b (x-b)(x-c)dx$,

d) $\displaystyle\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)dx$, e) $\displaystyle\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)^2 dx$.

3. i) Für folgende Funktionen f bestimme man Stammfunktionen über geeigneten Intervallen:

a) $\sqrt{x}\log x$, b) $e^{\sqrt{x}}$, c) $x^x(1+\log x)$.

ii) Man berechne die Integrale $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1+\cos x}\, dx$ und $\displaystyle\int_1^2 \cos(\log x)\, dx$.

4. Für die Funktionenfolge $(f_n) \subseteq C^\infty[-1,1], \; f_n(x) := n^{-1}\exp(-n^3x^2)$ zeige man $\|f_n\| \to 0$. Gilt $f_n' \to 0$ punktweise bzw. gleichmäßig?

5. Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $G \in C^1(I)$ und $g = G'$.

a) Man zeige, dass $y(x) := e^{G(x)}$ die *Differentialgleichung* $y' = g(x)y$ löst.

b) Es sei $f \in C^1(I)$ irgendeine Lösung von $y' = g(x)y$, d.h. es gelte $f' = gf$. Man zeige, dass die Funktion $h: \; x \mapsto f(x)e^{-G(x)}$ konstant ist.