UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 13

Abgabe 30.01.07, 18 Uhr

1. i) Man berechne die Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$.

ii) Für $f \in C[-1,1]$ zeige man $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$. Gilt dies auch für Integrale über $[0,\pi]$?

2. Man entscheide, ob folgende uneigentliche Integrale konvergieren:
 a) $\int_{1\downarrow}^{2} \frac{dx}{\log x}$, b) $\int_1^{\uparrow\infty} \sin^2\frac{1}{x}dx$, c) $\int_0^{\uparrow\infty} \sin(x^2)dx$,
 d) $\int_0^{\uparrow\infty} x^2e^{-x}dx$, e) $\int_0^{\uparrow\infty} x^xe^{-x^2}dx$.

3. i) Man berechne:

$$(1+i)^4,\ (1+i\sqrt{3})^6,\ \left(\frac{2+3i}{1-2i}+\frac{i}{3+i}\right)^{-1}.$$

ii) Man schreibe die folgenden Zahlen in Polarkoordinaten: $i-1$ und $1-i\sqrt{3}$.

4. i) Man skizziere die Mengen: $A_1 = \{z\in\mathbb{C} \mid |z| = \text{Im } z+1\}$,
$A_2 = \{z\in\mathbb{C} \mid \text{Re } (iz)\geq 1\}$.

ii) Man untersuche die Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$\left(\frac{i^n}{1+ni}\right),\ \left(\frac{e^{2n}}{(2+2i)^n}\right),\ \left((1+\frac{i}{n^2})^n\right).$$

5. Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C},\ f(z) := \frac{1+z}{1-z}$.

i) Man zeige, dass f stetig und injektiv ist, und finde $f(\mathbb{C}\setminus\{1\})$.
ii) Man berechne die Umkehrfunktion von f und zeige ihre Stetigkeit.
iii) Man bestimme $f(S_1(0)\setminus\{1\})$ und $f(K_1(0))$.

<u>Hinweis</u>: Die Anmeldungen zur Klausur finden in den Übungsgruppen statt, am 25-26.01 bzw, am 1-2.02. Zugelassen zur Klausur werden in jedem Fall diejenigen Studenten/Studentinnen, die 40% der Gesamtpunkte aus den ersten 13 Übungsblättern schon erreicht haben bzw. voraussichtlich erreichen werden, und auch die anderen Bedingungen für eine aktive Teilnahme erfüllt haben. Mögliche Ausnahmen von diesen Kriterien werden einzeln analysiert und in begründeten Fällen ist eine Zulassung ebenfalls möglich.