UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 15

Ferienblatt - wird Anfang des Sommersemesters besprochen

1. Für folgende Potenzreihen $\sum\limits_{k\geq 0} a_k(z-a)^k$ bestimme man den Konvergenzradius:

a) $a_k = k^5 \log(k+1) + k^2 i$,
b) $a_k = \dfrac{k^3 \sin k}{(1.7)^k}$,
c) $a_k = 3^{k/2} e^{-k}$,
d) $a_k = \dfrac{(ik)^k}{k!^2}$.

2. Die Reihe $\sum\limits_{k\geq 0} a_k(z-a)^k$ habe Konvergenzradius $\rho = 2$. Man bestimme die Konvergenzradien folgender Reihen ($m \in \mathbb{N}$):

a) $\sum\limits_{k\geq 0} a_k^m (z-a)^k$
b) $\sum\limits_{k\geq 0} a_k (z-a)^{mk}$
c) $\sum\limits_{k\geq 0} a_k (z-a)^{k^2}$

3. Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^m(I)$. Was kann man aus $f^{(m)}(x) \equiv 0$ schließen?

4. Zu $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ bestimme man das Taylor-Polynom vom Grad 3 in $a = 0$ und zeige $\left|\sqrt{\dfrac{3}{2}} - \dfrac{157}{128}\right| \leq \dfrac{1}{400}$.

5. Es sei $f \in C^2(a,\infty)$, so dass f und f'' auf (a,∞) beschränkt sind.
a) Man zeige auch $f' \in \mathcal{B}(a,\infty)$ sowie $\|f'\|^2 \leq 4\|f\| \cdot \|f''\|$.
Hinweis: Für $x \in (a,\infty)$ und $h > 0$ zeigt dass es ein ξ zwischen x und $x+2h$ gibt, mit $f'(x) = \frac{1}{2h}(f(x+2h) - f(x)) - hf''(\xi)$.
b) Gilt zusätzlich $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, so folgere man auch $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
Hinweis: Man wende a) auf (b,∞) an und untersuche $b \to \infty$.