

Übungen zu Analysis I für Lehramt Gymnasium
Blatt 10

Abgabe: Montag, 15.01., 10 Uhr, in die jeweiligen Kästen im Mathe-Foyer

Aufgabe 37: Sei $a \geq 1$ und (r_n) eine Folge in \mathbb{Q} mit $r_n \rightarrow r \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

$$a^{r_n} \rightarrow a^r \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Aufgabe 38: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 + 3n^2}$,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2n} - 1)^{3n}$,

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$.

Aufgabe 39: Entscheiden Sie, ob folgende Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt sind, und bestimmen Sie ggf. $\sup M$ und $\inf M$. Besitzt M ein Maximum oder ein Minimum?

(a) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 10\}$,

(b) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 27\}$,

(c) $M = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(d) $M = \{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2^m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 40: Es sei (a_n) eine beschränkte und monoton wachsende Folge. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$