Übungsblatt 1

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 25.10.2006, 12 Uhr

Aufgabe 1. (2 Punkte) Berechnen Sie das Volumen einer Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit Radius 1, indem Sie Zylinderkoordinaten benutzen.

Aufgabe 2. (5 Punkte) Bearbeiten Sie folgende Aufgabe aus der Analysis II Nachklausur, indem Sie anhand der im Anschluss an die Aufgabe angegebenen Leitfragen vorgehen:
Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} e^{xy}\sin(x^2 - y^2 + x) & = 0 \\ e^{x^2+y}\cos(y^2 + x^2) & = 1 \end{cases}$$

besitzt die offensichtliche Lösung $x = y = 0$.
Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$, die der Bedingung $\zeta^2 + \eta^2 < \varepsilon^2$ genügen, das gestörte Gleichungssystem

$$\begin{cases} e^{xy}\sin(x^2 - y^2 + x) & = \zeta \\ e^{x^2+y}\cos(y^2 + x^2) & = 1 + \eta \end{cases}$$

eine Lösung $(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta))$ besitzt, die stetig von der Größe der Störung (ζ, η) abhängt.

Leitfragen:

a) Welcher wichtige Satz aus Analysis II fällt Ihnen in Bezug auf die Aufgabe ein? Schlagen Sie den Satz nach.

b) „Übersetzen“ Sie die Aufgabe in den Satz: D.h. welche mathematischen Objekte in der Aufgabe entsprechen den mathematischen Objekten im Satz?

c) Überlegen Sie sich mit Hilfe von b) eine Struktur für den Beweis der Aufgabe: Stellen Sie hier zuerst eine geordnete Liste von Teilaussagen auf, anhand derer Sie die Aufgabe schließlich in d) beweisen.
(Beispielsweise: 1. Zeige, dass $x = y = 0$ eine Lösung des ersten Gleichungssystems ist. 2. usw.)

d) Beweisen Sie Ihre in c) aufgestellten Aussagen.

e) Überprüfen Sie Ihren Beweis auf Stimmigkeit: Haben Sie alles gezeigt, was Sie zeigen wollten/müssen?

Aufgabe 3. (3 Punkte) Sei $f \in C^k([a,b],\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$ eine reguläre C^k-Kurve ist mit $Spur(\gamma) = gr(f)$ und dass ferner gilt:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

Man sagt kurz, dass die *Länge eines Graphen* durch $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$ gegeben ist - ist diese Aussage mathematisch korrekt?

Aufgabe 4. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass es eine nichtrektifizierbare Kurve auf einem kompakten Intervall gibt:
Betrachten Sie dazu $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0,0) & t = 0 \\ (t, t\cos(\frac{1}{t})) & t \in (0,1] \end{cases}$$

Aufgabe 5. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $\Omega^1(X)$ ein Vektorraum ist.