Übungsblatt 2

Abgabe in die Briefkästen bis Donnerstag, 2.11.2006, 12 Uhr

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt. Zeigen Sie, dass es eine 1-1-Entsprechung zwischen df und ∇f gibt und dass aus dieser

$$df(x)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i(x)(v)$$

folgt.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Berechnen Sie das Kurvenintegral der 1-Form α:

a) $\alpha = ydx + xdy$, $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

b) $\alpha = (y - x)dx - ydy + dz$, $\gamma(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Berechnen Sie das Integral des Vektorfeldes $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ entlang der Kurve γ:

c) $V(x, y) = (e^x, e^y)$, $\gamma(t) = (\sqrt{t}, t)$, $t \in [0, 1]$.

d) $V(x, y) = (2xy, x^2 + y^2)$, $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [1, 2]$.

Geben Sie zu jeder 1-Form das assoziierte Vektorfeld an und umgekehrt.

Aufgabe 3. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind, falls $\alpha \in \Omega^1(X)$ exakt ist:

a) Für alle stückweisen C^1-Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to X$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt gilt $\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha$. (D.h. α ist wegunabhängig integrierbar.)

b) Für alle geschlossenen stückweisen C^1-Kurven $\gamma : [a, b] \to X$ gilt $\int_\gamma \alpha = 0$.

Bemerkung. Kurvenintegrale und Integrale von Vektorfeldern entlang einer Kurve sind allgemein auch für stückweise C^1-Kurven definiert.

Aufgabe 4. (3 Punkte) Zeigen Sie:

a) Jede konvexe Menge in $\mathbb{R}^n$ ist sternförmig.

b) Die punktierte Ebene $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ ist nicht sternförmig.

c) Die geschlitzte Ebene $\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0) \mid x \geq 0\}$ ist sternförmig.

Aufgabe 5. (4 Punkte) Zeigen Sie folgende Aussagen für die aus der Vorlesung bekannte Winkelform $\alpha = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$:

a) α erfüllt die Integrabilitätsbedingung.

b) α ist nicht exakt auf $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

c) α ist exakt auf $\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0) \mid x \geq 0\}$.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass α auf $\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0) \mid x \geq 0\}$ die Stammfunktion $f(x,y) = \theta(x,y)$, d.h. den Winkel zwischen (x,y) und der x-Achse besitzt. Drücken Sie dazu θ durch Arcusfunktionen, u.a. arctan, aus.)