

ÜBUNGSBLATT 3

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 8.11.2006, 12 Uhr

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass Homotopie mit festen Endpunkten eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Kurven von $[a, b]$ nach X ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Besitzen folgende 1-Formen Stammfunktionen? (Überprüfen Sie dies beispielsweise durch Integration längs radialer Wege.)

a) $\alpha = (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy - xydz$

b) $\beta = ydx + (x - y)dy$

Besitzen folgende Vektorfelder Potentiale auf ihren Definitionsbereichen?

c) $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $V(x, y) := (y, y - x)$

d) $V : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit
 $V(x, y, z) := (ye^{xy}, xe^{xy}, 2z)$

Aufgabe 3. (2 Punkte)

a) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend. Zeigen Sie dass sich zwei Stammfunktionen (bzw. Potentiale) höchstens um eine additive Konstante unterscheiden.

b) Was passiert, wenn X nicht zusammenhängend ist?

Aufgabe 4. (8 Punkte) In dieser Aufgabe sollen Sie ein Prinzip entwickeln, um zu messen, wie oft eine geschlossene Kurve um einen Punkt herumläuft. Genauer sei hierzu

$$\gamma : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \end{cases}$$

eine Kurve, deren Spur den Nullpunkt nicht enthält. Wie oft läuft die Kurve γ um den Nullpunkt?

- a) Entwickeln Sie eine bildliche Vorstellung zu dieser Frage, indem Sie den Winkel zwischen $\gamma(a)$ und $\gamma(t)$ betrachten. Gibt es unterschiedliche Situationen? Fertigen Sie jeweils Skizzen an.
- b) Stellen Sie eine analytische Formel für die Anzahl der Umläufe auf, die Sie zunächst einmal nur heuristisch begründen. (Stichwort: Winkelform)
- c) Beweisen Sie nun, dass Ihre Formel tatsächlich immer eine ganze Zahl ergibt.
- d) Überprüfen Sie an einigen einfachen Testbeispielen, dass diese ganze Zahl tatsächlich die Anzahl der Umläufe darstellt.

Bemerkung zum Abgabedatum von Aufgabe 4.

Teil a) und b) Abgabe am 8.11.2006

Teil c) und d) Abgabe am 15.11.2006