Übungsblatt 4

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 15.11.2006, 12 Uhr

Aufgabe 0. (3 Punkte) Wiederholung

a) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit regulärem Wert y_0. Zeigen Sie, dass $M := f^{-1}(y_0)$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist mit $(T_{x_0}M)^\perp = \mathbb{R} \cdot \nabla f(x_0)$ für alle $x_0 \in M$ (, d.h. der Gradient steht senkrecht auf den Niveaumengen der Funktion f).

b) Zeigen Sie, dass das Ellipsoid $E := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n (\frac{x_i}{a_i})^2 = 1\}$ eine (n-1)-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 1. (4 Punkte)

a) Geben Sie sowohl eine Familie von lokalen Parametrisierungen wie auch einen Atlas für $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ an. Bestimmen Sie alle Kartenwechsel des Atlasses.

b) Seien X, Y zwei Untermannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass dann auch $M := X \times Y$ eine Untermannigfaltigkeit ist und dass für den Tangentialraum im Punkt $(x, y) \in X \times Y$ die Gleichung $T_{(x,y)}(X \times Y) = T_xX \times T_yY$ gilt.

Aufgabe 2. (9 Punkte)
In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass der $\mathbb{R}^2$ diffeomorph auf die Einheitssphäre ohne den Nordpol, d.h. auf $S^2\backslash\{(0, 0, 1)\}$ abgebildet werden kann. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Bestimmen Sie die Abbildung $f : S^2\backslash\{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y, z) := (u(x, y, z), v(x, y, z))$, die jeden Punkt von $S^2\backslash\{(0, 0, 1)\}$ entlang der Geraden durch $(0, 0, 1)$ und den Punkt auf die Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ projiziert. Zeigen Sie, dass f ein Diffeomorphismus ist, indem Sie u.a. die Umkehrabbildung direkt angeben.

   f heißt *stereographische Projektion* der Sphäre auf die Ebene und lässt sich auf den n-dimensionalen Fall ($n \geq 1$) übertragen. (Letzteres muss nicht gezeigt werden.)

b) Geben Sie einen Atlas für $S^n, n \geq 1$ mit möglichst wenigen Karten an.

c) Zeigen Sie, dass S^n für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend ist.

d) Zeigen sie, dass $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ für $n \geq 3$ einfach zusammenhängend ist. Benutzen Sie dazu, dass S^{n-1} einfach zusammenhängend ist.