Übungsblatt 5

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 22.11.2006, 12 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Sei $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n_+$ offenen Teilmengen und $x \in \partial U$. Zeigen Sie, dass die Jacobimatrix von f in x die Form

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & D(f|_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}) & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & & \end{pmatrix}$$

hat.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für jede multilineare Abbildung $\alpha : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

i) $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

ii) $\alpha(v_1, ..., v_k) = 0$, falls $v_i = v_j$ mit $i \neq j$.

iii) $\alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -\alpha(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k)$.

iv) Für jede Permutation $\sigma : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., k\}$ ist $\alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) = \text{sign}\sigma \cdot \alpha(v_1, ..., v_k)$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Beweisen Sie Satz 1.19 aus der Vorlesung.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig und $U \cap V$ zusammenhängend. Sei $\alpha \in \Omega^1(U \cup V)$ geschlossen.

a) Zeigen Sie, dass die Einschränkungen von α auf U und auf V exakt sind.

b) Zeigen Sie, dass mit Teil a) folgt, dass dann auch α auf $U \cup V$ exakt ist.