Übungsblatt 6

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 29.11.2006, 12 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)

a) Berechnen Sie $dx \wedge dy \wedge dz$ in Kugelkoordinaten r, φ, θ mit $\begin{pmatrix} x(r,\varphi,\theta) \\ y(r,\varphi,\theta) \\ z(r,\varphi,\theta) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ und berechnen Sie damit $vol(B^3(1))$.

b) Betrachten Sie $\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ auf $\mathbb{R}^3$.

   i) Berechnen Sie $d\alpha$.

   ii) Ziehen Sie α mittels $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$$

   nach $\mathbb{R}^2$ zurück.

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Seien $e_1, e_2, e_3 \subset \mathbb{R}^3$ die Standardbasis. Bestimmen Sie explizit folgende Ausdrücke:

a) $dx_1 \wedge (dx_2 + x_1 dx_3)(e_2, e_1 + x_2 e_3)$,

b) $f^*(dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_3 dx_2 \wedge dx_3)$, wobei $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3^2 - x_1, x_2)$,

c) $d(4x_1^2 dx_2 + 6x_1 x_2 dx_3 - \cos(x_3) dx_1)$.

Aufgabe 3. (3 Punkte)
Alle Differentialformen und Funktionen in dieser Aufgabe seien auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ definiert. Zeigen Sie:

a) Ist α_1 geschlossen und α_2 exakt, so ist $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ exakt.

b) Ist α eine p-Form mit p ungerade, so gilt $\alpha \wedge \alpha = 0$. Was passiert für gerades p?

c) Ist α eine p-Form mit p ungerade und f eine positive Funktion, so dass $f\alpha$ geschlossen ist, so gilt $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

a) Seien $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Will man eine mittels $f : U \to V$ zurückgeholte Form $\alpha \in \Omega^k(V)$ mit $\alpha = \sum a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ explizit berechnen, so ist im Allgemeinen die folgende Formel hilfreicher als die ursprüngliche Definition:

$$f^*\alpha = \sum a_{i_1 \dots i_k} \circ f df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}.$$

Zeigen Sie die Gültigkeit der Formel.

b) Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung. Es gelte $m < n$. Sei $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ eine beliebige k-Form mit $m < k$. Zeigen Sie, dass dann $f^*\alpha \equiv 0$ gilt.

Aufgabe 5. (2 Punkte)
Zeigen Sie explizit, dass S^1 orientierbar ist.