Übungsblatt 7

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 6.12.2006, 12 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass $\int_M \omega$ wohldefiniert ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Berechnen Sie das Integral der Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

über den Zylinder $B^2(1) \times \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Auf $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ sei folgende Differentialform definiert:

$$\omega = \frac{x_1 dx_2 \wedge dx_3 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 + x_3 dx_1 \wedge dx_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

a) Zeigen Sie, dass ω geschlossen ist.

b) Betrachten Sie $S^2 = f^{-1}(1)$ (mit $f(x_1,x_2,x_3) = \|(x_1,x_2,x_3)\|^2$) mit der durch f induzierten Orientierung. Bestimmen Sie $\int_{S^2} \omega$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
In dieser Aufgabe lernen Sie kennen, wie man das Volumen von Rotationsflächen berechnet.

a) Skizzieren Sie die Menge $M := \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = f(z)^2, z \in (a,b)\}$ für eine Funktion $f : (a,b) \to (0,\infty)$.

b) Zeigen Sie, dass $\varphi : (0,2\pi) \times (a,b) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(\alpha,t) = (f(t)\cos\alpha, f(t)\sin\alpha, t)$$

eine lokale Parametrisierung für M ist. Bildet φ^{-1} bereits einen Atlas?

c) Geben Sie eine Formel für das Volumen von M an.

d) Berechnen Sie mit obiger Methode das Volumen eines Zylinders und eines Kegels, die jeweils rotationssymmetrisch zur z-Achse sind.