Übungsblatt 8

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 13.12.2006, 12 Uhr

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Konzeptaufgabe zum Vorlesungsabschnitt I. Integralsätze
Ziel der Aufgabe ist es, das Kapitel als Ganzes zu reflektieren, d.h. die wichtigsten konzeptionellen Sätze zu wiederholen und Bezüge zwischen den einzelnen Stoffgebieten herzustellen.

Gehen Sie aus vom Satz von Stokes:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

a) Fertigen Sie zuerst ein *Mindmap* an, indem Sie auf einem großen Blatt Papier den Satz von Stokes in die Mitte schreiben und alle relevanten Themen (bpsw. Untermannigfaltigkeit, k-Formen etc.) außen herum gruppieren und für jedes Thema die zentralen Definitionen und Aussagen aufschreiben. Deuten Sie Beziehungen zwischen einzelnen Stoffgebieten/Aspekten untereinander durch Pfeile an.

b) Schreiben Sie auf Grundlage Ihrer Mindmap einen zusammenhängenden Text, in den sie zentrale Definitionen und Sätze der Vorlesung zu den mathematischen Konzepten/Objekten, die im Satz von Stokes eine Rolle spielen, sowie einfache Beispiele hierzu einbauen. Konzentrieren Sie Ihre Darstellung dabei auf inhaltliche Aspekte anstatt auf Rechentechniken. Schreiben Sie mindestens 2 und maximal 4 Seiten.

Wir erinnern daran, dass die sinnvolle Bearbeitung der Konzeptaufgaben eine der Voraussetzungen für die Klausurteilnahme ist.
Aufgabe 1 muss erst am 20.12.2006 mit dem 9. Blatt abgegeben werden. Die Punkte für Aufgabe 1 zählen zum 9. Übungsblatt.

Aufgabe 2. (10 Punkte)
Das Ziel dieser Aufgabe ist, den Satz von Gauß in einer seiner zahlreichen physikalischen Anwendungen wiederzuerkennen; wir wählen dafür das elektrostatische Feld einer oder mehrerer Punktladungen.
Überzeugen Sie sich davon, dass die physikalische Aussage

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

nichts anderes als die (differenzielle) Version des Gaußschen Integralsatzes für das elektrostatische Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

ist, wobei q eine elektrische Punktladung im Ursprung ist und ρ die zugehörige Ladungsdichte (= Ladung pro Volumeneinheit) beschreibt.

a) Suchen Sie in einem Physikbuch im Kapitel über Elektrostatik eine Formulierung des Satzes von Gauß.

b) Kopieren Sie die entsprechenenden Seiten und kommentieren Sie sie ausführlich; übersetzen Sie dabei vor allem die physikalischen Formulierungen in unsere Sprache.

c) Beschreiben Sie in eigenen Worten, welche physikalischen Konsequenzen der Satz von Gauß in der Elektrostatik hat.

Aufgabe 3. (3 Punkte)
Sei M eine kompakte dreidimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ mit Rand ∂M. Leiten Sie aus dem Gaußschen Integralsatz die *Greensche Formel* her.

$$\int_M (\langle \nabla g, \nabla f \rangle + g\Delta f) dV = \int_{\partial M} \langle g \nabla f, n \rangle dS.$$

Dabei ist Δ der Laplace-Operator $\Delta f := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ und n das positive Einheitsnormalenfeld längs ∂M.

Aufgabe 4. (3 Punkte)
Sei N eine orientierte Untermannigfaltigkeit und $M = \partial N$. Zeigen Sie, dass für jedes Vektorfeld $v : M \to TN$ mit $v(p) \in T_pN$ gilt:

$$i_v \omega_N = \langle v, n \rangle \omega_M.$$

Dabei ist n das positive Einheitsnormalenfeld längs M.