Übungsblatt 9

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 20.12.2006, 12 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Berechnen Sie $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ und $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$.
(Hinweis: Berechnen Sie $\int_0^\infty e^{-it^2}dt$, indem Sie $f(z) := e^{-z^2}$ über einen Dreieckweg von $(0,0)$ über $(0,r)$ nach (r,r) und zurück integrieren.)

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, und für jede einschließlich Rand in U gelegene Dreiecksfläche Δ gelte

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann f holomorph auf U ist.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

a) Sind folgende Funktionen holomorph? Begründen Sie!

  i) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z \cdot \overline{z}$

  ii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \cosh(z^2)$

b) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. In der Notation $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ stellen die Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$ den Real- bzw. Imaginärteil von f dar. Zeigen Sie, dass u und v die sogenannte *Laplace*-Gleichung

$$\Delta u = \Delta v = 0$$

erfüllen.
Allgemein nennt man Funktionen, die die Laplace-Gleichung erfüllen **harmonisch**.

c) Berechnen Sie folgende Integrale:

  i) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i} dz$

  ii) $\int\limits_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^2+\pi^2}$