Übungsblatt 10

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 10.01.2007, 12 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Den folgenden Satz kann man als Verschärfung des *Satzes von Liouville* sehen. Sei f eine ganze Funktion und es gebe ein $n \in \mathbb{N}$ und positive Konstanten R, M mit $|f(z)| \leq M|z|^n$ für $|z| \geq R$. Zeigen Sie, dass dann f ein Polynom vom Grad $deg(f) \leq n$ ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei f eine biholomorphe Funktion der offenen Einheitskreisscheibe auf sich, welche den Nullpunkt festläßt. Zeigen Sie, dass dann f eine Drehung sein muss.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

a) Finden Sie reelle C^∞-Abbildungen $f : B_1(0) \to B_1(0)$ mit $f(0,0) = (0,0)$ und $|f(x,y)| \geq 2|(x,y)|$ für (x,y) nahe $(0,0)$.
(Hinweis: Konstruieren Sie eine möglichst einfache Familie solcher Abbildungen.)

b) Sind die von Ihnen konstruierten Abbildungen, aufgefasst als komplexe Funktionen, holomorph? Warum?

c) Beweisen oder widerlegen Sie die Holomorphie Ihrer Abbildung direkt (d.h. ohne einen tiefliegenden Satz zu zitieren).

Aufgabe 4. (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie für die aus der Vorlesung bekannte Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ den Typ der isolierten Singularitäten, indem Sie die Laurentreihen um $z_0 = 1$ und $z_0 = 2$ aufstellen. Bestimmen Sie auch den jeweiligen maximalen Konvergenzradius.

b) Entwickeln Sie $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ in eine Laurentreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$. Bestimmen Sie auch den maximalen Konvergenzradius der Reihe und den Typ der Singularität im Punkt $z_0 = 1$.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr!