Übungsblatt 11

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 17.01.2007, 12 Uhr

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Konzeptaufgabe zum Vorlesungsabschnitt II. Funktionentheorie

Ziel der Aufgabe ist es wieder, das Kapitel als Ganzes zu reflektieren und die wichtigsten Konzepte und Sätze zu wiederholen.

Gehen Sie hierzu aus vom Begriff der komplexen Differenzierbarkeit.

a) Fertigen Sie zuerst ein Mindmap in der Form einer Baumstruktur an, an deren Wurzel die komplexe Differenzierbarkeit steht. Lassen Sie daraus die grundlegenden Begriffe und Resultate der Vorlesung "erwachsen". Deuten Sie Beziehungen zwischen den einzelnen Punkten durch Pfeile an.

b) Verfassen Sie auf Grundlage Ihrer Mindmap einen zusammenhängenden Text über den Vorlesungsabschnitt Funktionentheorie, in den Sie auch zentrale Definitionen und Beispiele einbauen. Gehen Sie darüber hinaus auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede der komplexen Differenzierbarkeit und der Differenzierbarkeit im Reellen, wie sie aus Analysis I und II bekannt ist, ein. Schreiben Sie zwischen 2 und 4 Seiten.

Wir erinnern wieder daran, dass die sinnvolle Bearbeitung dieser Aufgabe eine der Voraussetzungen für eine Klausurteilnahme ist.
Diese Aufgabe muss erst am 24.01.2007 abgegeben werden; die Punkte zählen trotzdem zum Übungsblatt 11.

Aufgabe 2. (2 Punkte)
Beweisen Sie, dass die Umlaufzahl $\nu_\gamma(a)$ für festes γ als Funktion von a lokal konstant ist, solange $a \notin \mathrm{Spur}(\gamma)$.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie, dass für holomorphes $f : U \to \mathbb{C}$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

mit $\gamma(t) = a + \varepsilon e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt.

b) Sei f nun holomorph auf U bis auf isolierte Singularitäten; f habe bei z_0 einen Pol der Ordnung m. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} h^{(m-1)}(z_0)$$

mit $h(z) = f(z)(z - z_0)^m$ gilt.

c) Berechnen Sie die Residuen von $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^3}$ in allen Singularitäten.

d) Berechnen Sie $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$.

Aufgabe 4. (6 Punkte)

a) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1} dx$.

b) Zeigen Sie $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}$.

c) Zeigen Sie $\int\limits_0^\pi \frac{dt}{\alpha + \cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$ für $\alpha > 1$.