Übungsblatt 12

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 24.01.2007, 12 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Untersuchen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{x} = x^{2/3} \tag{1}$$

für $x \in \mathbb{R}$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ auf Existenz und Eindeutigkeit Ihrer Lösungen. Setzen Sie u.a. den Ansatz $x(t) = ct^\alpha$ in die Differentialgleichung ein und bestimmen Sie c und α so, dass $x(t)$ eine Lösung von (1) ist. Steht Ihr Ergebnis im Widerspruch zur Vorlesung?

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Führen Sie die ersten Schritte der Picard-Iteration für das eindimensionale Anfangswertproblem $\dot{x} = ax$ mit $x(0) = x_0$ und $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ explizit durch, und konstruieren Sie so die maximale Lösung. Wie lautet diese?

Aufgabe 3. (4 Punkte)

1. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass sich verschiedene Trajektorien (d.h. verschiedene Spuren von Lösungskurven) im zeitunabhängigen Fall $\dot{x} = f(x)$ nicht schneiden können. Gilt dies auch für den zeitabhängigen Fall $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$? Formulieren und beweisen Sie eine entsprechende Aussage.

2. In der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ einer autonomer Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ benutzt man oft o.B.d.A. $t_0 = 0$. Warum ist dies möglich? Was passiert bei zeitabhängigen Differentialgleichungen?

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösungen $(x(t), y(t))$ der Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{2}$$

im $\mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von den Anfangswerten $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. (Eine Möglichkeit ist, das System (2) als eine eindimensionale komplexe Differentialgleichung $\dot{z} = f(z)$ mit $z = x + iy$ aufzufassen.) Zeichnen Sie einige Trajektorien für verschiedene Anfangswerte (x_0, y_0).

In welchem Zusammenhang steht das System (2) mit der Bewegungsgleichung $\ddot{x} = -\sin x$ des freien Pendels? Stellen Sie eine Vermutung auf, was die Lösungen von (2) mit denen des freien Pendels zu tun haben könnten.