Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis

1. Übung zur Linearen Algebra I

(A) Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1:
Seien $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{C}$ gilt:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \cos(\varphi+\vartheta) + i\sin(\varphi+\vartheta).$$

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie alle Lösungen $x, y \in \mathbb{C}$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (1+3i)x + 2y &= -1 \\ 3x - iy &= 2 - i \end{aligned}$$

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ mit den in der Vorlesung definierten Verknüpfungen ein Körper ist.

(B) Hausaufgaben: (Einwurf bis zum 25.10.2006 in die vorgesehenen Briefkästen)

Aufgabe 4: **3+2 Punkte**
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\zeta_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:
a) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\zeta_n^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, und es ist $\zeta_n^n = 1$.
b) Für $n \geq 2$ gilt: $1 + \zeta_n + \zeta_n^2 + \ldots + \zeta_n^{n-1} = 0$.

Aufgabe 5: **5 Punkte**
Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, und seien $a, b \in K$. Zeigen Sie, dass $a^2 = b^2$ genau dann gilt, wenn $a = b$ oder $a = -b$ ist.

Aufgabe 6: **5 Punkte**
Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrl} -6x_1 & +6x_2 & +2x_3 & = 4 \\ -9x_1 & +8x_2 & +3x_3 & = 8 \\ -3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 3 \end{array}$$

Aufgabe 7: **5 Punkte**
Sei K ein Körper und $\lambda \in K$. Zeigen Sie, dass $K \times K$ zusammen mit den Verknüpfungen

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \quad \text{und} \quad (a,b)\cdot(c,d) = (ac + \lambda bd, ad + bc)$$

genau dann ein Körper ist, wenn $\lambda \neq x^2$ für alle $x \in K$ gilt.