

2. Übung zur Linearen Algebra I

(A) Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1:

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} & x_2 & +2x_3 = 4 \\ x_1 & +2x_2 & +4x_3 = -1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 = 2. \end{array}$$

- Bestimmen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix und bringen Sie sie durch elementare Umformungen auf Zeilenstufenform.
- Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Aufgabe 2:

Sei $M = \{a, b, c\}$ eine Menge mit 3 Elementen auf der eine Addition $+: M \times M \rightarrow M$ mittels der Verknüpfungstabelle

+	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

gegeben ist. Bestimmen Sie eine Verknüpfung $\cdot: M \times M \rightarrow M$, so dass $(M, +, \cdot)$ ein Körper ist. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper \mathbb{Z}_3 .

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & +2x_2 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & = 0 \end{array}$$

(B) Hausaufgaben: (Einwurf bis zum 2.11.2006 um 8:30 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen)

Aufgabe 4:

5 Punkte

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über \mathbb{R} in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} r \cdot x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & r \cdot y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & r \cdot z & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 5:

5 Punkte

Gegeben seien paarweise verschiedene Objekte a, b, c und d . Setzen Sie die folgenden Additions- und Multiplikationstabellen so fort, dass die Menge $\{a, b, c, d\}$ zusammen mit den so erklärten Verknüpfungen einen Körper bildet.

+	a	b	c	d
a	a			
b		a		
c			a	
d				a
·	a	b	c	d
a	a	a		
b		b		
c				
d				

Aufgabe 6:**4 Punkte**

Berechnen Sie den Realteil und den Imaginärteil der komplexen Zahlen

$$(2 - 3i) + i(1 - i), \quad (1 - i)^3 \quad \text{und} \quad \frac{x - yi}{x + yi} \quad \text{wobei } x, y \in \mathbb{R}, (x, y) \neq (0, 0).$$

Aufgabe 7:**2+4 Punkte**

- a) Erstellen Sie die Verknüpfungstabellen für die Addition und Multiplikation des Körpers \mathbb{Z}_5 .
- b) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper \mathbb{Z}_5 .

$$\begin{array}{rclcl} 4x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +4x_2 & & = & 0 \\ 3x_1 & & +3x_3 & = & 3 \end{array}$$