UNIVERSITÄT DORTMUND
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
WS 2006/07

# 3. Übung zur Linearen Algebra I

## (A) Präsenzaufgaben:

**Aufgabe 1:**
Zeigen Sie, dass für zwei Vektoren $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ und es gibt kein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{v}$,

ii) $\boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$ und es gibt kein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\boldsymbol{v} = \mu \boldsymbol{w}$,

iii) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$.

Zwei Vektoren, die eine der obigen Bedingungen erfüllen, werden *linear unabhängig* genannt.

**Aufgabe 2:**
Eine Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *Ebene*, wenn es $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$ gibt mit $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$, so dass

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b\}.$$

Beweisen Sie, dass eine Teilmenge $E$ des $\mathbb{R}^3$ genau dann eine Ebene ist, wenn es Vektoren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ gibt, so dass $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ linear unabängig sind, und

$$E = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Solch eine Darstellung wird *Parameterdarstellung* der Ebene genannt.

**Aufgabe 3:**
Bestimmen Sie für die Ebene

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1\}$$

eine Parameterdarstellung, und für die in Parameterdarstellung gegebene Ebene

$$E = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

eine beschreibende lineare Gleichung.

**(B) Hausaufgaben:** (Einwurf bis zum 8.11.2006 um 15 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen)

**Aufgabe 4:** **5 Punkte**

Betrachten Sie die Ebenen $E_1$ und $E_2$ im $\mathbb{R}^3$, die durch

$$E_1 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \}, \quad E_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \},$$

definiert werden. Berechnen Sie den Schnitt der beiden Ebenen:

$$S := E_1 \cap E_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x} \in E_1 \text{ und } \boldsymbol{x} \in E_2\}.$$

Stellen Sie diesen Schnitt in der Parameter-Darstellung dar:

$$E_1 \cap E_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b},\ \beta \in \mathbb{R}\},$$

wobei $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ zu bestimmende Vektoren sind. Was bedeutet der Schnitt geometrisch? Lässt sich der Schnitt immer in der obigen Form darstellen? Falls dies nicht geht, in welchen geometrischen Situationen?

**Aufgabe 5:** **5 Punkte**

Es seien $R := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ und $K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $R$ mit den Einschränkungen der Verknüpfungen in $\mathbb{R}$ ein Ring ist.

b) Zeigen Sie, dass $K$ mit den Einschränkungen der Verknüpfungen in $\mathbb{R}$ ein Körper ist.

**Hinweis:** Überlegen Sie zunächst genau, welche Ring- bzw. Körperaxiome noch nachgeprüft werden müssen. Übrigens bezeichnet man $R$ und $K$ üblicherweise mit $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]]$ bzw. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]]$.

**Aufgabe 6:** **5 Punkte**

Es seien Metall-Legierungen $M_1, M_2$ und $M_3$ gegeben, die alle Kupfer, Silber und Gold enthalten, und zwar in folgenden Prozentsätzen:

| | Kupfer | Silber | Gold |
|---|---|---|---|
| $M_1$ | 20 | 60 | 20 |
| $M_2$ | 70 | 10 | 20 |
| $M_3$ | 50 | 50 | 0 |

Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40 Prozent Kupfer, 50 Prozent Silber und 10 Prozent Gold entält?

**Aufgabe 7:** **5 Punkte**

Für $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$, mit $(a_1, \ldots, a_n) \neq \boldsymbol{0}$, wird durch die lineare Gleichung $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ eine *Hyperebene* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ beschrieben:

$$E := \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\}$$

Diese Hyperebene teilt den Raum $\mathbb{R}^n$ in zwei *Halbräume*, wovon wir einen mit $H$ bezeichnen:

$$H := \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \geqslant b\}$$

Eine Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C,\ \lambda \in [0, 1] \quad \Longrightarrow \quad \lambda\boldsymbol{x} + (1 - \lambda)\boldsymbol{y} \in C\ .$$

Zeigen Sie, dass $E$ und $H$ konvex sind. Zeigen Sie weiterhin, dass sogar der Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) Halbräumen und/oder Hyperebenen konvex ist.