Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis

4. Übung zur Linearen Algebra I

(A) Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1:
Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass für zwei beliebige Aussagen A und B der folgende logische Ausdruck eine Tautologie ist.

$$(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Aufgabe 2:
Gegeben seien zwei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Welche der Matrixprodukte AA, AB, BA, BB sind definiert? Rechnen Sie sie gegebenenfalls aus.

Aufgabe 3:
Formulieren Sie mit Hilfe der Quantoren $\forall$ und $\exists$:
„Für jede reelle Zahl a und jede noch so kleine positive Zahl ϵ gilt: Es gibt eine rationale Zahl q, deren Abstand zu a kleiner als ϵ ist.“
Nun negieren Sie diese Aussage sowohl sprachlich als auch in Formeln.

(B) Hausaufgaben: (Einwurf bis zum 15.11.2006 um 12 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen)

Aufgabe 4: **2+2+3 Punkte**

a) Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

b) Es seien $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \in {\mathbb{Z}_7}^{4\times 2}$ und $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in {\mathbb{Z}_7}^{2\times 4}$. Berechnen Sie $C \cdot D$ und $D \cdot C$.

c) Es sei $p > 2$ Primzahl, $\mathbb{Z}_p$ der Körper mit p Elementen und $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in {\mathbb{Z}_p}^{3\times 3}$. Zeigen Sie, dass A^p die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 5: **1+1+1 Punkte**
Es seien A, B, C und D Teilmengen einer Grundmenge M. Welche der folgenden Ausdrücke sind allgemein gültig, welche sind es nicht? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \bar{B} \subseteq \bar{A}$

b) $(A \cup B = A \cup C) \quad \Rightarrow \quad B = C$

c) $(A \cap B = A \cap C) \quad \Rightarrow \quad B = C$

Aufgabe 6: **5 Punkte**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -13 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix B, so dass

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Führen Sie die Berechnung von B auf das Lösen von linearen Gleichungssystemen zurück.

Aufgabe 7: **5 Punkte**

Zeigen Sie, dass die Menge

$$K = \{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

zusammen mit der Matrizenaddition und -multiplikation einen Körper bildet.

Zusatzfrage: Kommt Ihnen dieser Körper bekannt vor?