UNIVERSITÄT DORTMUND
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis

5. Übung zur Linearen Algebra I

(A) Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1:
Seien $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ Lösungen eines homogenen Gleichungssystems mit m Gleichungen und n Unbekannten, und α eine beliebige reelle Zahl. Zeigen Sie, dass dann auch $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ und $\alpha\boldsymbol{x}$ Lösungen des Gleichungssystems sind.

Aufgabe 2:
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \geq -17\}, \quad f(x) = x^2 - 8x - 1,$

b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad g(x) = (x^3, sin(x)).$

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die binäre Relation $\sim_m$ auf $\mathbb{Z}$ mit

$$x \sim_m y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{Z} \quad \text{so dass} \quad am = x - y$$

eine Äquivalenzrelation ist.

(B) Hausaufgaben: (Einwurf bis zum 22.11.2006 um 12 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen)

Aufgabe 4: **6 Punkte**
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 &= c \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 &= d \end{aligned}$$

mit Lösungsmenge $\mathcal{L}$. Wir nehmen an, dass $\mathcal{L}$ nicht leer ist. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Sind $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{L}$, dann ist stets auch $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \\ x_4 - y_4 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{L}$.

ii) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$.

iii) $c = d = 0$, d.h. das Gleichungssystem ist homogen.

Aufgabe 5: **2+2 Punkte**

Es seien $f : X \to Y, g : Y \to X$ und $h : Y \to X$ drei Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Ist f surjektiv und gilt $g \circ f = h \circ f$, so folgt $g = h$.

b) Ist f injektiv und gilt $f \circ g = f \circ h$, so folgt $g = h$.

Aufgabe 6: **1+1+2 Punkte**

Sind die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv, bijektiv?

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - 2y)$

Die Antworten sind (wie immer) zu begründen.

Aufgabe 7: **4+2 Punkte**

Es seien für jedes $n \in \mathbb{N}$ ganze Zahlen F_n rekursiv definiert durch

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n > 2.$$

Man nennt die Folge $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ nach Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci (ca. 1170-1240), die Folge der Fibonacci-Zahlen.

a) Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > 1$ gilt:

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}.$$

b) Folgern Sie aus a), dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$F_{mn} \text{ ist durch } F_m \text{ teilbar.}$$