Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis

6. Übung zur Linearen Algebra I

(A) Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1:

Es sei $V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der 3-Tupel mit Einträgen in $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen sind Teilräume von V?

a) $M_1 = \{(a, b, c) \in V \mid a \cdot b \cdot c = 0\}$;

b) $M_2 = \{(a, b, c) \in V \mid a + b = 0\}$;

c) $M_3 = \{(a, b, c) \in V \mid a + b = 1\}$;

d) $M_4 = \{(a, b, c) \in V \mid a = b \text{ oder } a = -b\}$.

Aufgabe 2:
Überprüfen Sie, ob der Vektor $(4, 5, -4)$ in dem von $M = \{(1, 2, -1), (2, 3, -2)\}$ erzeugten Teilraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ liegt.

Aufgabe 3:
Überprüfen Sie, ob

$$M = \{(2, 1, 0, -1), (1, 0, 2, 3), (1, 0, 0, 0), (2, 1, 2, 2)\}$$

eine Basis des von M erzeugten Teilraums $< M >$ des $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 4:

(B) Hausaufgaben: (Einwurf bis zum 29.11.2006 um 12 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen)

Aufgabe 4: **1+1+1 Punkte**
Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen Teilräume der angegebenen K-Vektorräume V sind.

a) $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \subseteq \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$, wobei $V = \mathbb{R}^4$ und $K = \mathbb{R}$.

b) $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \subseteq \mathbb{R}^4 \mid x_1 x_2 = x_3 x_4 = 0\}$, wobei $V = \mathbb{R}^4$ und $K = \mathbb{R}$.

c) $U_3 = \{(x_1, x_2) \subseteq \mathbb{C}^2 \mid \overline{x_1} = x_2\}$, wobei $V = \mathbb{C}^2$ und $K = \mathbb{C}$

Aufgabe 5: **5 Punkte**
Es sei $V = \mathbb{Q}^4$,

$$M := \{(1, 2, 3, 4), (2, 0, 1, -1), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, -1)\} \subseteq V,$$

$U =< M >$ der von den Vektoren in M erzeugte Teilraum von V und $\boldsymbol{v} = (1, -1, 0, -2)$, $\boldsymbol{w} = (1, 0, 0, 2)$. Überprüfen Sie, ob v, w in U enthalten sind.

Aufgabe 6: **2+2+2 Punkte**

Es sei K ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und es seien A, B und C Teilräume von V.

a) Zeigen Sie: Genau dann ist $A \cup B$ ein Teilraum von V, wenn $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$ gilt.

b) Zeigen Sie: Ist $C \subseteq A$, so gilt $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$.

c) Gelten allgemein die Beziehungen $A \cap (B+C) = (A \cap B) + (A \cap C)$ und $A + (B \cap C) = (A+B) \cap (A+C)$?

Aufgabe 7: **3+3 Punkte**

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ eine Familie linear unabhängiger Vektoren in V. Bestimmen Sie je eine Basis der folgenden beiden Teilräume:

$$U = < \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_4 - \boldsymbol{v}_1 >,$$

$$W = < \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4 > .$$

(Es versteht sich ,dass die lineare Unabhängigkeit der Elemente der angebenen Basis gezeigt werden muss.)