Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis

7. Übung zur Linearen Algebra I

(A) Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1:
Es seien $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ gegeben durch $f_1(x) := (x-1)^2$, $f_2(x) := (x+2)^2$, $f_3(x) := (x+1)(x+2)$ $(x \in \mathbb{R})$. Prüfen Sie, ob $\{f_1, f_2, f_3\}$ als Teilmenge des Vektorraumes $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 2:
Seien $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis von $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 >$.

Aufgabe 3:
Seien A und B zwei endliche linear unabängige Teilmengen im K-Vektorraum V mit $|A| < |B|$. Zeigen Sie, dass ein $b \in B \setminus A$ existiert, so dass $A \cup \{b\}$ linear unabhängig ist.

(B) Hausaufgaben: (Einwurf bis zum 6.12.2006 um 12 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen)

Aufgabe 4: **2+2+1+1 Punkte**
Für $c \in \mathbb{R}$ sei M_c die Menge aller reellen 3×3-Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

mit der Eigenschaft, dass alle Zeilensummen, Spaltensummen und Diagonalsummen in X gleich c sind. Die Elemente in $M := \cup_{c \in \mathbb{R}} M_c$ heißen *magische Quadrate*.

a) Zeigen Sie, dass M ein Teilraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist und $M_c \neq \emptyset$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{R}$, für die M_c ein Teilraum ist.

b) Zeigen Sie, dass für alle $X \in M_c$ die Gleichung $c = 3x_5$ gilt. Was folgt aus dieser Gleichung speziell für die Gestalt der Elemente in M_0?

c) Seien $x_1 = 3, x_2 = 5$ und $x_3 = 1$ die Einträge der ersten Zeile einer Matrix. Wie kann man diese Zeile zu einem magischen Quadrat ergänzen?

d) Kann man allgemein eine gegebene erste Zeile (x_1, x_2, x_3) zu einem magischen Quadrat ergänzen? Wenn ja, wie?

Aufgabe 5: **5 Punkte**
Gegeben seien die beiden Teilräume des $\mathbb{R}^4$

$$U =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} > \quad \text{und} \quad V =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} > .$$

Bestimmen Sie die Dimension des Teilraums $U \cap V$.

Aufgabe 6: **5 Punkte**

Es sei K ein Körper mit Einselement 1 und $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge eines K-Vektorraumes V. Man zeige: Für $\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n$ (mit $a_i \in K$) ist die Menge

$$\{\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}\}$$

genau dann linear abhängig, wenn $a_1 + \cdots + a_n = 1$ ist.

Aufgabe 7: **4 Punkte**

Seien $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^5$. Bestimmen Sie eine Basis von $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5 >$.