Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
WS 2006/07

8. Übung zur Linearen Algebra I

(A) Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass es genau einen Homomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie Bild(f) durch Angabe einer Basis.

c) Berechnen Sie Kern(f) durch Angabe einer Basis.

d) Berechnen Sie $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Aufgabe 2:
Welche der folgenden Abbildungen sind Homo-, Mono-, Epi- oder Isomorphismen?

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_1(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$.

b) $f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad f_2(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y \\ z+w \end{pmatrix}$.

c) $f_3 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad f_3(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\overline{x} \\ iy \end{pmatrix}$.

d) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad f_4(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = xf + yg$, wobei $\{f, g\}$ linear unabängig sind.

(B) Hausaufgaben: (Einwurf bis zum 20.12.2006 um 12 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen)

Aufgabe 3: **3+3 Punkte**

a) Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

i) $\phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \phi_1(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ x+2y \end{pmatrix}.$

ii) $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \phi_1(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} xy \\ x \\ x^2-y \end{pmatrix}.$

iii) $\phi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \phi_1(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+1 \\ x+2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

b) Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Kern(ϕ)=Bild(ϕ)=$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$.

Aufgabe 4: **1+4 Punkte**

Für einen Körper K, eine natürliche Zahl n und eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ sei eine Abbildung

$$\phi : \; K^{n\times n} \;\to\; K^{n\times n}$$

definiert durch

$$\phi(X) = AX - XA.$$

a) Zeigen Sie, dass ϕ eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie im Spezialfall $n = 3$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Kern und Bild von ϕ.

Aufgabe 5: **5 Punkte**

Gibt es eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \phi(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

so dass

a) ϕ ein Isomorpismus ist?

b) ϕ kein Isomorpismus ist?

Aufgabe 6: **4 Punkte**

Sei K ein Körper. Für $i \in \mathbb{N}$ sei $p_i \in K^K$ definiert durch $p_i(x) = x^i$. Bestimmen Sie die Dimension des von $\{p_1, p_2, p_3\}$ erzeugten Teilraums für die Fälle $K = \mathbb{Z}_2$, $K = \mathbb{Z}_3$ und $K = \mathbb{Q}$.