Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
WS 2006/07

9. Übung zur Linearen Algebra I

(A) Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1:
Es seien V und W zwei K-Vektorräume, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ eine Basis von V und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann ein Monomorphismus ist, wenn die Vektoren $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 2:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 9x \\ 3y \\ -3y \end{pmatrix}$. Weiterhin seien

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

zwei Basisfolgen des $\mathbb{R}^2$, sowie

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad D = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

zwei Basisfolgen des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie ${}_C[f]_A$ und ${}_D[f]_B$.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie den Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(B) Hausaufgaben: (Einwurf bis zum 10.01.2007 um 12 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen)

Aufgabe 4: **4 Punkte**
Es seien

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

zwei Basisfolgen des $\mathbb{Z}_7^3$, sowie

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad C' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

zwei Basisfolgen des $\mathbb{Z}_7^2$. Weiterhin sei eine lineare Funktion $f : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^2$ definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ y - z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrizen ${}_C[f]_B, {}_C[f]_{B'}, {}_{C'}[f]_B$ und ${}_{C'}[f]_{B'}$.

Aufgabe 5: **5 Punkte**

Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ den Rang der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: **3+3 Punkte**

Es sei $K = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Zeigen Sie, dass K ein Teilraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist und geben Sie eine Basisfolge B von K an.

b) Sei $f : K \to \mathbb{C}$ definiert durch $f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right) := a + ib$. Zeigen Sie, dass f ein Vektorraum-Isomorphismus ist.
Bestimmen Sie dann für die Basisfolge $A = ((1), (i))$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ und die Basisfolge B aus Aufgabenteil a) die Matrix ${}_A[f]_B$.

Aufgabe 7: **5 Punkte**

Es seien $V_1, V_2, \ldots, V_n$ endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper K und $V_0 := \{\mathbf{0}\}$, $V_{n+1} := \{\mathbf{0}\}$. Weiterhin seien $F_i : V_i \to V_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n$, lineare Abbildungen. Es ergibt sich folgende *Sequenz* von Abbildungen:

$$\{\mathbf{0}\} \xrightarrow{F_0} V_1 \xrightarrow{F_1} V_2 \xrightarrow{F_2} \quad \ldots \quad \xrightarrow{F_{n-1}} V_n \xrightarrow{F_n} \{\mathbf{0}\}$$

Wenn $\mathrm{Kern}(F_i) = \mathrm{Bild}(F_{i-1})$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt, dann heißt diese Sequenz *exakt*.
Beweisen Sie: Wenn die obige Sequenz exakt ist, dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i \;=\; -\dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_3 + \cdots \mp \dim V_{n-1} \pm \dim V_n \;=\; 0\,.$$

Aufgabe 8:

Beweisen Sie konstruktiv folgenden logischen Ausdruck:

Frohe Weihnachten $\wedge$ ein gutes neues Jahr!