Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
WS 2006/07

10. Übung zur Linearen Algebra I

(A) Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1:
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und der Eigenschaft, dass $a \circ a = e$ für jedes $a \in G$ gilt. Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ abelsch ist.

Aufgabe 2:
Vertauscht man in einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ die erste und vierte Zeile, und addiert anschliessend das zweifache der zweiten Zeile zur dritten, so erhält man eine Matrix $\tilde{A}$. Bestimmen Sie die Matrix $S \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ für die gilt

$$S \cdot A = \tilde{A}.$$

Aufgabe 3:
Sind die folgenden Matrizen invertierbar? Wenn ja, geben Sie die inverse Matrix an.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3{}^{3\times 3},$$

(B) Hausaufgaben: (Einwurf bis zum 17.01.2007 um 12 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen)

Aufgabe 4: **2+1+2 Punkte**
Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension n und $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft

$$\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f \circ f).$$

Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{\mathbf{0}\}$,

b) $V = \mathrm{Kern}(f) + \mathrm{Bild}(f)$,

c) es gibt eine Basisfolge B, so dass die Matrix $A =_B [f]_B$ mit Einträgen $\{a_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ die Eigenschaft besitzt, dass für eine bestimmte Zahl $k \in 1, \ldots, n$ gilt

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{für alle} \quad i \leq k \text{ oder } j \leq k.$$

Aufgabe 5: **5 Punkte**
Auf $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ werde für $a, b \in G$ die Verknüpfung

$$a \odot b := a + b - ab$$

definert. Weisen Sie nach, dass $(G, \odot)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 6: **2+2+2 Punkte**

a) Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ invertierbar ist und berechnen Sie ihre Inverse.

b) Stellen Sie A als Produkt von Elementarmatrizen dar.

c) Berechnen Sie mittels elementarer Zeilenumformungen eine Matrix $X \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7: **2+2 Punkte**

Zeigen Sie:

a) Für einen Körper K, eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ und eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$E_n - A^m = (E_n - A) \sum_{i=0}^{m-1} A^i = \sum_{i=0}^{m-1} A^i (E_n - A).$$

(Dabei sei $A^0 = E_n$.)

b) Ist $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix, für die ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass A^m die Nullmatrix ist, so ist $E_n - A$ invertierbar. Wie sieht die inverse Matrix aus?