Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis

11. Übung zur Linearen Algebra I

(A) Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1:
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine alternierende 2-Multilinearform (oder "Bilinearform") mit der Eigenschaft

$$f\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right) = 2.$$

Bestimmen Sie $f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\right)$.

Aufgabe 2:
Gegeben seien die Permutationen $\kappa = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ und $\tau = (1,3)$ aus S_5.

a) Bestimmen Sie $\sigma = \kappa \circ \tau$ und σ^{-1}.

b) Schreiben Sie σ und σ^{-1} als Produkt von Transpositionen.

c) Bestimmen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma)$ und $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie $\det \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 1\\ 2 & 7 & 9\end{pmatrix}$.

(B) Hausaufgaben: (Einwurf bis zum 24.01.2007 um 12 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen)

Aufgabe 4: **2+1+3 Punkte**
Es sei $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ eine Matrix mit Einträgen aus dem Körper K. Dann ist die zu A transponierte Matrix $A^T = (a'_{ij}) \in K^{n\times m}$ gegeben durch $a'_{ij} = a_{ji}$ für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$.

a) Zeigen Sie:
$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 6}$. Bestimmen Sie eine Matrix S, so dass $A \cdot S$ aus A durch Addition des fünffachen der dritten Spalte zur vierten Spalte entsteht.

c) Zeigen Sie allgemein: Ist E eine Elementarmatrix, die durch Multiplikation von links an eine Matrix A eine elementare Zeilenumformung bewirkt, so bewirkt die Multiplikation von E^T von rechts an A eine entsprechende elementare Spaltenumformung.

Aufgabe 5: **5 Punkte**

Bestimmen Sie für $f \in \operatorname{Alt}_3(\mathbb{R}^3)$ mit $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 2$ die Werte

$$f\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\7\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 6: **5 Punkte**

Es seien

$$\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

zwei Permutationen aus S_6.

a) Schreiben Sie κ, τ und $\sigma = \kappa \circ \tau$ als Produkt ziffernfremder Zyklen.

b) Schreiben Sie κ, τ und σ als Produkt von Transpositionen.

c) Bestimmen Sie außerdem $\operatorname{sgn}(\kappa), \operatorname{sgn}(\tau)$ und $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

Aufgabe 7: **4 Punkte**

Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = (x-1)^2(x+2).$$

Bitte beachten Sie, dass am Freitag, dem 26.01.07, die Vorlesung ausnahmsweise im HGII/HS6 stattfindet.