Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis

12. Übung zur Linearen Algebra I

(A) Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1:
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\det(AA^T)$.

Aufgabe 2:
Sei x^* eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{cccl} x_1 & -x_2 & +2x_3 = & 4 \\ 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 = & -1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 = & 2. \end{array}$$

Bestimmen Sie x_2^* mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die zu $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ adjungierte Matrix $\mathrm{adj}(A)$ und die inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 4:
Für $x \in 1, \ldots, 5$ definieren wir die Mengen

$$M_x := \{\sigma \in S_5 \mid \sigma(3) = x\}.$$

Für welche x ist $(M_x, \circ)$ mit der üblichen Verknüpfung $\circ$ von Abbildungen eine Gruppe?

(B) Hausaufgaben: (Einwurf bis zum 31.01.2007 um 12 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen)

Aufgabe 5: **5 Punkte**
Es sei K ein Körper und $x_1, \ldots, x_n \in K$. Die Vandermonde-Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ ist definiert durch

$$a_{ij} \ := \ {x_i}^{j-1} \ .$$

Zeigen Sie per Induktion nach n, dass für die Vandermonde-Matrix A und $n \geq 2$ gilt

$$det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

Aufgabe 6: **3 Punkte**
Geben Sie eine unendliche Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ an, in der jeweils n verschiedene Elemente linear unabhängig sind.

Aufgabe 7: **2+2+2+2 Punkte**
Sei K ein Körper. Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn $A = A^T$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass die symmetrischen Matrizen einen Untervektorraum $\mathcal{SM}(n, K)$ von $K^{n\times n}$ bilden, und geben Sie eine Basis und die Dimension von $\mathcal{SM}(n, K)$ an.

Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so heißt eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ *schiefsymmetrisch*, wenn $A = -A^T$ gilt. Sei im folgenden $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

b) Zeigen Sie, dass die schiefsymmetrischen Matrizen einen Untervektorraum $\mathcal{SSM}(n, K)$ von $K^{n\times n}$ bilden, und geben Sie eine Basis und die Dimension von $\mathcal{SSM}(n, K)$ an.

c) Für $A \in K^{n\times n}$ definieren wir die Matrizen $A_s = \frac{1}{2}(A + A^T)$ und $A_{ss} = \frac{1}{2}(A - A^T)$.
Zeigen Sie: A_s ist symmetrisch, A_{ss} ist schiefsymmetrisch, und es gilt $A = A_s + A_{ss}$.

Sind U, W zwei Unterräume eines K-Vektorraums V, so ist V die *direkte Summe* von U und W, wenn die beiden Bedingungen

(i) $V = U + W$, und

(ii) $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$

erfüllt sind. Man schreibt dann auch $V = U \oplus W$.

d) Zeigen Sie

$$K^{n\times n} = \mathcal{SM}(n, K) \oplus \mathcal{SSM}(n, K).$$

Aufgabe 8: **4 Punkte**
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}.$$

Hinweis: Sie können Sich die Arbeit erleichtern, wenn Sie die Schiefsymmetrie der Matrix ausnutzen.

Bitte beachten Sie, dass am Freitag, dem 26.01.07, die Vorlesung ausnahmsweise im HGII/HS6 stattfindet.