UNIVERSITÄT DORTMUND
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
WS 2006/07

# 13. Übung zur Linearen Algebra I

## (A) Präsenzaufgaben:

**Aufgabe 1:**
Zu gegebenen Vektoren $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $F(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$ den orientierten Flächeninhalt des von $\boldsymbol{v_1}$ und $\boldsymbol{v_2}$ aufgespannten Parallelogramms.

a) Bestimmen Sie $F\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$.

b) Bestimmen Sie $F\left(\varphi\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ für die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+y\\x+y\end{pmatrix}$.

**Aufgabe 2:**
Es sei

$$A = \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von $A$.

b) Bestimmen Sie, wenn möglich, eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $P^{-1}AP$ Diagonalgestalt hat.

**Aufgabe 3:**
Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe, so heißt $U \subseteq G$ eine *Untergruppe* von $(G, \circ)$, wenn $(U, \circ_{U\times U})$ selbst eine Gruppe bildet. Da die Assoziativität durch $G$ impliziert wird, ist $U$ somit Untergruppe von $G$, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten:

(i) $a \circ b \in U$ für alle $a, b \in U$,

(ii) $e \in U$ für das neutrale Element $e$ aus $G$,und

(iii) $a^{-1} \in U$ für alle $a \in U$.

Seien nun $(G_1, \circ_1), (G_2, \circ_2)$ zwei Gruppen und $f : G_1 \to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus, (d.h. es gilt $f(a \circ_1 b) = f(a) \circ_2 f(b)$ für alle $a, b \in G_1$.) Zeigen Sie, dass der Kern von $f$ eine Untergruppe von $G_1$ ist.

**Aufgabe 4:**
Teilen Sie das Polynom $2X^4 - X^3 + X^2 + 2X \in \mathbb{Q}[X]$ mit Rest durch $X^2 + X + 1$.

**(B) Hausaufgaben:** (Einwurf bis zum 07.02.2007 um 12 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen)

**Aufgabe 5:** **5 Punkte**

Eine Untergruppe $H$ von $(G, \circ)$ ist ein *Normalteiler*, wenn für jedes $h \in H$ und jedes $g \in G$ das Produkt $g \circ h \circ g^{-1} \in H$ ist.

a) Zeigen Sie, dass der Kern eines Gruppenhomomorphismus ein Normalteiler ist.

b) Zeigen Sie, dass
$$\mathrm{SL}(n, K) := \{X \in \mathrm{GL}(n, K) \mid \det(X) = 1\}$$
ein Normalteiler von $\mathrm{GL}(n, K)$ ist.

c) Zeigen Sie, dass die Menge $A_n$ aller geraden Permutationen vom Grad $n$ ein Normalteiler der symmetrischen Gruppe $S_n$ ist.

d) Geben Sie alle Elemente der Gruppe $A_4$ in disjunkter Zykelschreibweise an.

**Aufgabe 6:** **5 Punkte**

Es seien $K$ ein Körper und $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n \in K$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass es genau ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad $\leq n$ gibt, so dass $f(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, n$ gilt.
*Hinweis:* Konstruieren Sie zunächst Polynome $g_k \in K[X]$, so dass
$$g_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k, \\ 0 & \text{falls } i \neq k \end{cases}$$

**Aufgabe 7:** **5 Punkte**

Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in {\mathbb{Z}_2}^{4\times 4} .$$

**Aufgabe 8:** **5 Punkte**

Es sei $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$. Berechnen Sie $A^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
*Hinweis:* Diagonalisieren Sie $A$.