

## 14. Übung zur Linearen Algebra I

### (A) Präsenzaufgaben:

#### Aufgabe 1:

Zeigen Sie: Ist  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $A \in K^{n \times n}$ , so ist  $\lambda^k$  ein Eigenwert von  $A^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

#### Aufgabe 2:

Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ist  $A$  diagonalisierbar?

#### Aufgabe 3:

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $\chi_A$  das charakteristische Polynom von  $A$ . Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- i)  $\chi_A = X^n \in \mathbb{C}[X]$ ;
- ii)  $A^k = 0$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ ;

#### Aufgabe 4:

Zeigen Sie: Ist  $A \in K^{n \times n}$  invertierbar, so gibt es ein Polynom  $f \in K[X]$  vom Grad kleiner gleich  $n - 1$ , so dass  $A^{-1} = f(A)$ .

### (B) Hausaufgaben: (Einwurf bis Donnerstag, den 05. 04. 2007, um 12 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen)

#### Aufgabe 5:

**3+3 Punkte**

Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenräume der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der beiden Matrizen sind diagonalisierbar?

#### Aufgabe 6:

**4 Punkte**

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f \in \text{End}(V)$ . Zeigen Sie: Hat  $f^2 + f$  den Eigenwert  $-1$  hat, so hat  $f^3$  den Eigenwert  $1$ . (Dabei ist  $f^2(x) = f(f(x))$ ,  $f^3$  analog und  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ .)

#### Aufgabe 7:

**4 Punkte**

Seien  $A, B \in K^{n \times n}$  zwei Matrizen, die jeweils nur Eigenwerte der geometrischen Vielfachheit  $1$  besitzen. Zeigen Sie: Gilt  $AB = BA$ , dann haben  $A$  und  $B$  die gleichen Eigenvektoren.

**Aufgabe 8:****2+2+2 Punkte**

- a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Falls  $A$  diagonalisierbar ist, berechnen Sie eine invertierbare Matrix  $P$ , so dass  $P^{-1}AP$  Diagonalgestalt hat.
- b) Es sei  $(u_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die durch  $u_1 = u_2 = 1$ ,  $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$  rekursiv definierte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- c) Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$u_n = (\alpha^n - \beta^n) / \sqrt{5},$$

wobei  $\alpha := (1 + \sqrt{5})/2$  und  $\beta := (1 - \sqrt{5})/2$ .