Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 02.11.2006, 10.15h

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium

WS 2006/07 Übungsblatt 2

Aufgabe 1 Links, rechts, vor, zurück, das macht Spaß, das bringt Glück
Seien M, N zwei Mengen und sei $f : M \to N$ eine Abbildung.
Für eine Teilmenge T von N ist $f^{-1}(T)$ definiert als die Menge aller x aus M, für die $f(x)$ aus T ist (d. h. $f^{-1}(T) := \{x \in M \mid f(x) \in T\}$) und heißt das **Urbild** von T unter f.

a) Sei $T \subseteq N$. Gilt stets $f(f^{-1}(T)) \subseteq T$? (Antworten natürlich immer mit Begründung!) Unter welcher Bedingung gilt hier Gleichheit?

b) Gilt $f^{-1}(f(a)) = \{a\}$ für alle $a \in M$? Wenn nicht, unter welchen Bedingungen gilt dies?

c) Zeigen Sie: $f^{-1}(N \setminus T) = M \setminus f^{-1}(T)$ für $T \subseteq N$!

Aufgabe 2 Die Geheimnisse des ISBN-Codes
Der ISBN-Code ist als Menge der Nullstellen einer Abbildung $K^{10} := \underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{10\,mal} \to K$ mit $K := \mathbb{F}_{11}$ definiert. Diese Abbildung ist gegeben durch

$$F(x) = \overline{1} \cdot x_1 + \overline{2} \cdot x_2 + \overline{3} \cdot x_3 + \ldots + \overline{10} \cdot x_{10} \quad \text{für} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_{10}) \in K^{10}.$$

Dabei kommen für die Nullstellen nur Elemente mit $x_1, \ldots, x_9 \neq \overline{10}$ in Frage. Beachten Sie, dass die bei der Berechnung von $F(x)$ vorkommenden Rechenoperationen Verknüpfungen in $K := \mathbb{F}_{11}$ sind.

a) Nehmen Sie ein Buch her! Sei $a_1 a_2 \ldots a_{10}$ der ISBN-Code dieses Buches. Dabei steht X für 10, kommt aber im Code wenn überhaupt nur als letzte Ziffer (Prüfziffer) vor. Zeigen Sie:

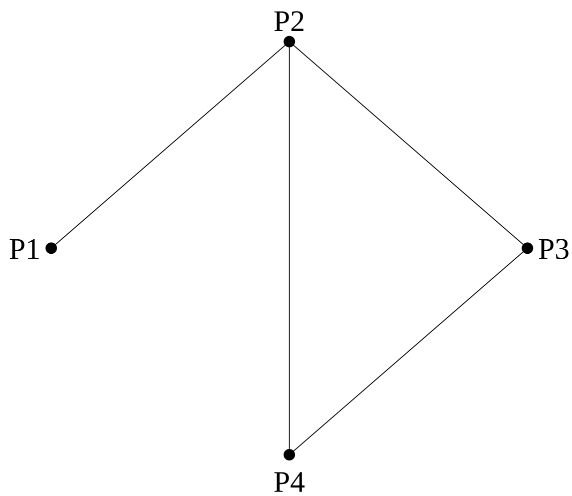
$$\overline{1} \cdot \overline{a_1} + \overline{2} \cdot \overline{a_2} + \overline{3} \cdot \overline{a_3} + \ldots + \overline{10} \cdot \overline{a_{10}} = \overline{0}\,!$$

b) Es sei $x \in K^{10}$ mit $F(x) = \overline{0}$. Zeigen Sie: Geht $x' \in K^{10}$ aus x durch Vertauschung zweier verschiedener, benachbarter Ziffern hervor, gilt $F(x') \neq \overline{0}$!

c) Berechnen Sie jeweils die fehlende Prüfziffer der ISBN-Nummern 3-14-123928-? und 3-12-772411-? !

Aufgabe 3 Aus einem alten chinesischen Rechenbuch
Ein Bauer besitzt Hasen, Hühner und Schweine. Seine 60 Tiere haben zusammen doppelt so viele Beine wie Flügel. Wie viele Tiere von jeder Art hat er, wenn die Zahl der Schweine und Hühner dreimal so groß ist wie die der Hasen?

Aufabe 4 Der Erste knipst das Licht an!
In einem Stromnetz befinden sich n Lampen und bei jeder Lampe ein Schalter. Es werde repräsentiert durch einen Graphen mit Ecken $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (die für die Lampen/Schalter stehen) und einigen Kanten $\overline{P_i P_j}$ (die für die Verbindungsleitungen stehen). Wird ein Schalter betätigt, so ändert die anliegende Lampe sowie jede durch eine direkte Verbindungsleitung angeschlossene Lampe ihren Ein/Auszustand.
Hier ein Beispiel für ein solches Stromnetz:



a) Zeichnen Sie den Graphen für folgende Situation:
Wird Schalter P_1 betätigt, so ändern sich die Zustände aller Lampen außer der von Lampe P_3. Wird P_2 betätigt, so ändern sich die Zustände bei P_1, P_2, P_3. Wird P_3 betätigt, so ändern sich die Zustände bei P_2, P_3, P_4 und wird P_4 betätigt, so ändern sich die Lampenzustände bei P_1, P_3, P_4, P_5. Wird schließlich P_5 betätigt, so ändern sich die Lampenzustände bei P_1, P_4, P_5.

b) Im Stromnetz aus a) seien alle Lampen dunkel. Durch welche Schalteroperationen erreicht man, dass alle Lampen leuchten? Lösen Sie diese Aufgabe mittels eines geeigneten LGS über $\mathbb{F}_2$ und überprüfen Sie ihr Ergebnis anhand des gezeichneten Graphen.
Tipp: Falls es eine Verbindungsleitung zwischen P_i und P_j gibt, wähle man den Koeffizient a_{ij} des Gleichungssystems gleich $\overline{1}$, sonst gleich $\overline{0}$.

Aufgabe 5 Euklid wird durch den Kakao gezogen

Den größten gemeinsamen Teiler zweier positiver ganzer Zahlen $a, b \in \mathbb{N}_+$ kann man mit dem **euklidischen Algoritmus** wie folgt bestimmen:
Dividiere die größere der beiden Zahlen mit Rest durch die kleinere. Ersetze sie dann durch den Rest. Wiederhole dies solange, bis die Division aufgeht. Die kleinere der beiden Zahlen ist dann der gesuchte ggT.

a) Berechnen Sie mit Hilfe von CoCoA und dem euklidischen Algorithmus die folgenden größten gemeinsamen Teiler:

$$ggT(64, 81),\ ggT(1001, 9317),\ ggT(19669, 35568)$$

b) Finden Sie den passenden eingebauten Befehl von CoCoA und verifizieren Sie damit Ihre Ergebnisse aus a).

c) Versuchen Sie zwei Zahlen $a, b \in \{1, \ldots, 100\}$ so zu bestimmen, dass der euklidische Algorithmus möglichst viele Schritte erfordert.
Tipp: Der Rekord ist 9 Schritte.

d) Kommen Ihnen die Zahlen aus c) bekannt vor? Können Sie das Ergebnis erklären?